УМОВИ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Київ — 2022

1. Чисельне інтегрування

1. Знайти наближене значення числа π з 5 правильними значущими цифрами за його інтегральним представленням $\pi = \int\limits_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ за допомогою квадратурної формули 1) лівих прямокутників; 2) трепецій; 3) Сімпсона. Використати правило Рунге. Яку кількість значень підінтегральної функції необхідно використати в кожному випадку?

2. Знайти наближене значення числа π з 5 правильними значущими цифрами за його інтегральним представленням $\pi = \int\limits_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ за допомогою квадратурної формули 1) правих прямокутників; 2) середніх прямокутників; 3) Сімпсона. Використати оцінку залишкових членів. Яку кількість значень підінтегральної функції необхідно використати в кожному випадку?

3. Наближено обчислити повний еліптичний інтеграл другого роду $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x dx}$ з точністю 0,005 1) за формулою середніх прямокутників та Сімпсона, використавши правило Рунге; 2) за формулою трапецій та Сімпсона, використавши оцінку залишкових членів.

4. Побудувати таблиці функції Лобачевського $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ з 4 правильними значущими цифрами на проміжку $x \in [0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції. Використати формулу Сімпсона, правило Рунге.

5. Побудувати таблиці функції Лобачевського $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ з 2 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції. Використати формулу правих прямокутників, правило Рунге.

6. Побудувати таблиці функції Лобачевського $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ з 2 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції. Використати формулу лівих прямокутників, оцінку залишкових членів.

7. Побудувати таблиці функції Лобачевського $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ з 2 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції. Використати формулу середніх прямокутників, правило Рунге.

8. Побудувати таблиці функції Лобачевського

$F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ з 4 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції. Використати формулу Сімпсона, правило Рунге.

9. Побудувати таблиці функції Лобачевського $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ з 2 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції. Використати формулу трапецій, оцінку залишкових членів.

10. Наближено обчислити довжину дуги еліпса за формулою $L = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} dt$ за допомогою таблиці Ромберга, використавши 4 кроки.

11. Ймовірність, що значення нормально розподіленої випадкової величини буде менше заданого числа x задається формулою $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Наближено обчислити значення $p(0,5)$, $p(1)$, $p(5)$ за допомогою таблиці Ромберга, використавши три кроки.

12. Обчислити ділогарифм Ейлера $F(x) = -\int\limits_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ за формулою Гауса. Побудувати таблиці ділогарифмів Ейлера з 6 правильними значущими цифрами на проміжку $[0;1]$ з кроком $0,01$, побудувати графік функції.

13. За формулою Гауса обчислити функцію інтегрального логарифма $F(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}$. Побудувати таблиці інтегрального логарифма з 6 правильними значущими цифрами на проміжку $[0;0,5]$ з кроком $0,01$, побудувати графік функції.

14. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,5$. Використати метод лівих прямокутників, оцінку залишкових членів.

15. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,5$. Використати метод правих прямокутників, правило Рунге.

16. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,5$. Використати метод середніх прямокутників, оцінку залишкових членів.

17. Наближено обчислити інтеграл $I =$

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,5$. Використати метод трапецій, правило Рунге.

18. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,5$. Використати метод Сімпсона, оцінку залишкових членів.

19. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ методом Канторовича. Використати квадратурну формулу лівих прямокутників.

20. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ методом Канторовича. Використати квадратурну формулу правих прямокутників.

21. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ методом Канторовича. Використати квадратурну формулу середніх прямокутників.

22. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ методом Канторовича. Використати квадратурну формулу трапецій.

23. Наближено обчислити інтеграл $I =$

$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ методом Канторовича. Використати квадратурну формулу Сімпсона.

24. Використавши заміну змінної інтегрування, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ за формулою лівих прямокутників з точністю $\varepsilon = 10^{-1}$.

25. Використавши заміну змінної інтегрування, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ за формулою правих прямокутників з точністю $\varepsilon = 2 \times 10^{-1}$.

26. Використавши заміну змінної інтегрування, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ за формулою середніх прямокутників з точністю $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$.

27. Використавши заміну змінної інтегрування, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ за формулою трапецій з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

28. Використавши заміну змінної інтегрування, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ за формулою Сімпсона з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

29. Наближено обчислити інтеграл $I =$

$\int\limits_{0}^{\infty} \ln \operatorname{th} \dfrac{x}{2} dx$ за формулою Гауса для $n = 2$. Оцінити похибку.

30. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{e^{x^2-x}}$ за формулою Гауса для $n = 3$. Оцінити похибку.

31. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^3} dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод лівих прямокутників, правило Рунге.

32. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^3} dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод правих прямокутників, оцінку залишкових членів.

33. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^3} dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод середніх прямокутників, правило Рунге.

34. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^3} dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод трапецій, оцінку залишкових членів.

35. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_2^\infty \frac{dx}{1+x^3}dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод Сімпсона, правило Рунге.

36. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^3}dx$ з точністю 10^{-4}, користуючись формулою Сімпсона. Оцінити верхню межу інтегрування, для оцінки точності головної частини інтегралу застосувати принцип Рунге.

37. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{2+x^2}e^{-x^2/2}dx$ з точністю 10^{-4}, користуючись формулою прямокутників. Оцінити верхню межу інтегрування, для оцінки точності головної частини інтегралу застосувати принцип Рунге.

38. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^\infty \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x}dx$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.01$. Верхню межу інтегрування обирати з міркувань точності $\varepsilon = 10^{-4}$.

39. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ інтеграл $I(\omega) = \int\limits_0^\infty \sin(\omega x)e^{-x^3}dx$ при $\omega = 1; 10; 20; 20$. Оцінити верхню межу інтегрування, для оцінки точності головної частини інтегралу застосувати принцип Рунге.

40. Обчислити інтеграл $I(a) = \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+x}dx$, $a = 1; 2; ...; 10$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, користуючись формулою трапецій. Оцінити верхню межу інтегрування, для оцінки точності головної частини інтегралу застосувати принцип Рунге.

41. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 e^x \ln(1+x^2)dx$. За допомогою формули Сімпсона з точністю $\varepsilon = 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}$. Для підбору кроку використати принцип Рунге. Проаналізувати величину кроку в залежності від точності.

42. Обчислити інтеграл $I(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}}{a+x}dx$ при $a = 0.1; 0.2; ...; 1$, користуючись формулою середніх прямокутників з кроком $h = 0.01$. Верхню межу інтегрування обирати з міркувань точності $\varepsilon = 10^{-4}$.

43. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ $I(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{a+x^2}e^{-x^2}dx$ при $a = 1; 2; ...; 10$, користуючись формулою трапецій. Оцінити верхню межу інтегрування, для оцінки точності головної частини інтегралу застосувати принцип Рунге.

44. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$: $I = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx$ користуючись формулою середніх прямокутників. Оцінити верхню межу інтегрування, для оцінки точності головної частини інтегралу застосувати принцип Рунге.

45. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$: $I = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x \sin x}{x^4 + 1} dx$ користуючись формулою Сімпсона. Оцінити верхню межу інтегрування, для оцінки точності головної частини інтегралу застосувати принцип Рунге.

2. Задача Коші

1. На відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта III порядку точності та методом Ейлера $(x^2 + y)y' = 1$; $y(1) = 1.1323$.

2. За допомогою явного чотирьохкрокового методу Адамса побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y' = 0.25y + yx^2$; $y(0) = -1$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта.

3. За допомогою методу Ейлера-Коші та модифікованим методом Ейлера побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0; \pi/4]$ з кроком $h = \pi/40$; $2y' + \dfrac{\sin 2x}{2 - \sin^2 x} = 0$; $y(0) = 0$.

4. На відрізку $x \in [0.5; 1]$ з кроком $h = 0.05$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта 4-го порядку точності та методом Ейлера: $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$; $y(0.5) = 0$.

5. За допомогою неявного чотрирьохкрокового методу Адамса побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1 : y' = 2y + \sqrt{x} = 0$; $y(1) = 2$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта.

6. На відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта 3-го та 4-го порядку точності: $y' = 0.4y - 0.002x(1 - 0.2x)$; $y(0) = 1$.

7. На відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта 4 порядку точності та методом Ейлера Коші: $y' = \sqrt{x}y + 1$; $y(1) = 0$.

8. За допомогою неявного чотирьохкрокового методу Адамса побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1 : y' = \sqrt{x} - \sqrt{y}$; $y(1) = 1$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта.

9. За допомогою модифікованого методу Ейлера та Рунге-Кутта 3 порядку точності побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0.1; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y' = 0.4y + 0.002x(1 - 0.2x)$; $y(0.1) = 1.0408$.

10. За допомогою методу явного чотирьохкрокового методу Адамса побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; $y(0) = 0$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта.

11. За допомогою методу Ейлера-Коші та методом Рунге-Кутта 3 порядку точності побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [2.6; 6.2]$ з кроком $h = 0.2$: $y' = x + \cos \frac{y}{\pi}$; $y(2.6) = 5.122$.

12. На відрізку $x \in [0; 1.2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта 3-го порядку точності та методом Ейлера-Коші: $y' = \dfrac{x}{y} + 0.5y$; $y(0) = 1$.

13. За допомогою явного трьохкрокового методу Адамса на відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння: $y' = 2y + x + yx^2$; $y(0) = 5.25$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта 4 порядку точності.

14. На відрізку $x \in [-2; 1]$ з кроком $h = 0.2$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта 4-го порядку точності та модифікованим методом Ейлера: $y' = 4 - x^2 - 2yx$; $y(-2) = 0.5$.

15. На відрізку $x \in [0; 0.5]$ розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} x' = -2xt + 5z \\ y' = -(1-\sin t)x - y + 3z \\ z' = -xy + 2zt \\ x(0) = 2; y(0) = 1; z(0) = -1 \end{cases}$$
з кроком $h = 0.05$, застосувавши метод Ейлера.

16. На відрізку $x \in [0; 1]$ розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння
$$\begin{cases} y''' = -xy + 2x \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1; \\ y''(0) = 0; \end{cases}$$
з кроком $h = 0.1$, застосувавши метод Ейлера-Коші.

17. Розв'язати з кроком $h = 0.1$ на відрізку $x \in [1; 2]$ задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, звівши його до системи диференціальних рівнянь першого порядку з наступним застосуванням методу Рунге-Кутта 2-го порядку точності:
$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{\sqrt{y-x}}{2x} \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

18. Розв'язати з кроком $h = 0.1$ на відрізку $x \in [0; 1]$ задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, звівши його до системи диференціальних рівнянь першого порядку з наступним застосуванням модифікованого методу Ейлера.

$$\begin{cases} y'' - 3xy'x^2 + yx^3 = 0 \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

19. Розв'язати з кроком $h = 0.1$ на відрізку $x \in [1; 2]$ задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, звівши його до системи диференціальних рівнянь першого порядку з наступним застосуванням методу Ейлера-Коші

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{\sqrt{x+y}}{4x} \\ y(1) = 1; \\ y'(1) = 0.5 \end{cases}$$

20. На відрізку $x \in [0; 0.9]$ з точністю розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z' = (1-x)^2 - zx + y \\ y' = zx - yx^2; \\ y(0) = 1; z(0) = 1 \end{cases}$$ з кроком $h = 0.1$, застосувавши метод Ейлера.

21. На відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння явним чотирьохкроковим методом Адамса $(x^2+y)y' = 1; y(1) = 1.1323$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Ейлера-Коші.

22. За допомогою методу Ейлера-Коші побудувати таблицю значень функції $y(1)$ на відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y'' = 0.25y + x^2 - xy$; $y'(0) = 1$; $y(0) = -1$.

23. За допомогою методу Рунге-Кутта 4-го порядку точності та методом Ейлера побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0; \pi/4]$ з кроком $h = \pi/40$: $y' = \dfrac{\sin 2x}{2 - \sin^2 x}$; $y(0) = 0$.

24. На відрізку $x \in [0.5; 1]$ з кроком $h = 0.05$ розв'язати рівняння за допомогою неявного трьохкрокового методу Адамса: $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$; $y(0.5) = 0$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта третього порядку точності.

25. За допомогою методу Рунге-Кутта 3-го порядку точності та методу Ейлера Коші побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1$: $yy' - 2y + x = 0$; $y(1) = 2$.

26. На відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта 2-го порядку точності: $y'' = 0.4y - 0.002x(y - 0.2x)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$.

27. На відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння за допомогою неявного трьохкрокового методу Адамса : $y' = \sqrt{x}y + 1$; $y(1) = 0$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта 4 порядку точності.

28. За допомогою модифікованого методу Ейлера побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1$: $y'' = \sqrt{x} - \sqrt{2}xy$; $y(1) = 1$; $y'(1) = -2$.

29. За допомогою явного чотирьохкрокового методу Адамса побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0.1; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y' = 0.4y + 0.002x(1 - 0.2x)$; $y(0.1) = 1.0408$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта 2 порядку точності.

30. За допомогою методу Ейлера-Коші та методу Рунге Кутта 3 порядку точності побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; $y(0) = 0$.

31. За допомогою методу Рунге-Кутта 3-го порядку точності побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [2.6; 6.2]$ з кроком $h = 0.2$: $y'' = x + \cos\frac{y}{\pi}$; $y(2.6) = 5.122$; $y'(2.6) = 0$.

32. На відрізку $x \in [0; 1.2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння явним чотирьохкроковим методом Адамса: $y' = \dfrac{y}{x} + 0.5y$; $y(0) = 1$. Необхідне для розрахунків початкове значення $y(x)$

знайти методом Рунге-Кутта 3 порядку точності.

33. За допомогою модифікованого методу Ейлера на відрізку $x \in [0;1]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння: $y'' = x + 3y'$; $y(0) = 5.25$; $y'(0) = 1.5$.

34. На відрізку $x \in [-2;1]$ з точністю з кроком $h = 0.2$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта 2-го порядку точності: $y'' = 4 - x^2 - yx$; $y(-2) = 0.5$; $y'(-2) = -1.5$.

35. На відрізку $x \in [2;2.5]$ з точністю розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 1 + 5zy - tx \\ y' = -(1 - \sin t)x - y - 3z \\ z' = xy - 2zt \\ x(2) = 1; y(2) = 0; z(2) = 1 \end{cases}$$

з кроком $h = 0.05$, застосувавши метод Ейлера.

36. На відрізку $x \in [0;1]$ розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння

$$\begin{cases} y''' = -x^2 y + \cos x \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1; \\ y''(0) = 0; \end{cases}$$

з кроком $h = 0.1$, застосувавши метод Рунге-Кутта 2-го порядку точності.

37. Розв'язати з кроком $h = 0.1$ на відрізку $x \in [1;2]$ задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, звівши його до системи диференціальних рівнянь першого порядку з наступним застосуванням модифікованого методу Ейлера:

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{3}x^2} \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

38. Розв'язати з кроком $h = 0.1$ на відрізку $x \in [0; 1]$ задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, звівши його до системи диференціальних рівнянь першого порядку з наступним застосуванням методу Ейлера-Коші.

$$\begin{cases} y'' - 3xy' + y' = 0 \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

39. Розв'язати з кроком $h = 0.1$ на відрізку $x \in [1; 2]$ задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, звівши його до системи диференціальних рівнянь першого порядку з наступним застосуванням методу Ейлера-Коші

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{\sqrt{x+y}}{4\sqrt{2}x^2} \\ y(1) = 1; \\ y'(1) = 0.5 \end{cases}$$

40. На відрізку $x \in [2; 2.9]$ з точністю розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z' = zyx + y \\ y' = xz - 2y; \\ y(2) = 3; z(2) = -1 \end{cases}$$ з кроком $h = 0.1$, застосувавши метод Ейлера Коші.

41. На відрізку $x \in [2;3]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта III порядку точності $y'' - x^2 + yx = 1$; $y(2) = 1.1323$; $y'(2) = -0.6473$.

42. За допомогою методу Рунге-Кутта 4-го порядку точності та методу Рунге-Кутта 2-го порядку точності побудувати таблицю значень функції $y(1)$ на відрізку $x \in [0;1]$ з кроком $h = 0.1$: $y' = 0.25y + x^2$; $y(0) = -1$.

43. За допомогою неявного трьохкрокового методу Адамса побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0;\pi/4]$ з кроком $h = \pi/40 : 0.5y' - \dfrac{\sin 2x}{2 - \sin^2 x}$; $y(0) = 0$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта 2 порядку точності.

44. На відрізку $x \in [0.5;1]$ з кроком $h = 0.05$ розв'язати рівняння методом Ейлера-Коші та методом Рунге Кутта 3 порядку точності: $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$; $y(0.5) = 0.215$.

45. За допомогою модифікованого методу Ейлера побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1 : y'' - 2yx + x = 0$; $y(1) = 2$; $y'(1) = -1$.

46. На відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння за допомогою неявного чотирьохкрокового методу Адамса: $y' = 0.4y - 0.002x(y - 0.2x)$; $y(0) = 1$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта 2 порядку точності.

47. На відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння методом Ейлера-Коші: $y''' = \sqrt{x}y + 1$; $y(1) = 0$; $y'(1) = -2$; $y''(1) = 3$.

48. За допомогою методу Рунге-Кутта 3-го та 4-го порядку точності побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0.1 : y' = \sqrt{x} - yx$; $y(1) = 1$.

49. За допомогою модифікованого методу Ейлера-Коші побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0.1; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y'' = 0.4y + 0.002x(y - 0.2x)$; $y(0.1) = 1.0408$; $y'(0.1) = -0.0124$.

50. За допомогою методу Рунге-Кутта 2-го порядку точності побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [0; 1]$ з кроком $h = 0.1$: $y'' = \sqrt{x} + xy$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

51. За допомогою явного чотирьохкрокового методу Адамса побудувати таблицю значень функції $y(x)$ на відрізку $x \in [2.6; 6.2]$ з кроком $h = 0.2$: $y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$; $y(2.6) = 5.122$. Початкові значення $y(x)$ знайти методом Рунге-Кутта 3 порядку точності.

52. На відрізку $x \in [0; 1.2]$ з кроком $h = 0.1$ розв'язати рівняння модифікованим методом Ейлера: $y'' = \dfrac{y}{x} + 0.5y$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$.

3. Крайова Задача

1. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - (x + y)y'(x) - y(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \\ y(0) = 1; \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$$

2. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{2}{x-2}y'(x) + (x - 2)y(x) = 1 \\ y(0) = -0.5; \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

3. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$,

$k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{4x}{x^2+1} y'(x) - \dfrac{1}{x^2+1} y(x) = -\dfrac{3}{(x^2+1)^2} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$$

4. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + (x+1) y'(x) - y(x) = -\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 1.38294 \end{cases}$$

5. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -3e^{-x} \\ y'(0) = 0; \\ y(1) + 2y'(1) = 0 \end{cases}$$

6. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - y(x) = -2xe^{x} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 2.71828 \end{cases}$$

7. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - (x^2+0.1)y'(x) - 2xy(x) = 2\dfrac{3x^2-0.1}{(x^2+0.1)^3} \\ y(0) - 2y'(0) = 10; \\ y(1) = 10/11 \end{cases}$$

8. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1,10}$, $x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{0.08}{(0.2x+1)^2}y(x) = 2\dfrac{0.18}{(0.2x+1)^{3/2}} \\ y(0) = 0.5; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

9. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1,10}$, $x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{0.5}{x+0.4}y'(x) - \sqrt{x+0.4}\,y(x) = -\dfrac{2}{3}(x+0.4)^2 \\ y'(0) = \sqrt{0.4}; \\ 3y(1) + 1.4y'(1) = 1.4 \end{cases}$$

10. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1,10}$, $x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{3}{2x+1}y'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2x+1}} \\ y(0) = 1; \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$$

11. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$,

$h = 0.1$, $k = \overline{1,10}$, $x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - (x+y)y'(x) - y(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \\ y(0) = 1; \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$$

12. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1,10}$, $x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{2}{x-2}y'(x) + (x-2)y(x) = 1 \\ y(0) = -0.5; \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

13. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1,10}$, $x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{4x}{x^2+1}y'(x) - \dfrac{1}{x^2+1}y(x) = -\dfrac{3}{(x^2+1)^2} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$$

14. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1,10}$, $x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + (x+1)y'(x) - y(x) = -\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 1.38294 \end{cases}$$

15. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -3e^{-x} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$$

16. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - y(x) = -2xe^{x} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 2.71828 \end{cases}$$

17. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - (x^2 + 0.1)y'(x) - 2xy(x) = 2\dfrac{3x^2 - 0.1}{(x^2 + 0.1)^3} \\ y(0) = 3; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

18. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{0.08}{(0.2x + 1)^2} y(x) = 2\dfrac{0.18}{(0.2x + 1)^{3/2}} \\ 0.2y(0) - 2y'(0) = 0.5; \\ y'(1) = -\dfrac{0.2}{\sqrt{1.2}} \end{cases}$$

19. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{0.5}{x + 0.4} y'(x) - \sqrt{x + 0.4}\, y(x) = -\dfrac{2}{3}(x + 0.4)^2 \\ y(0) = \sqrt{1.4}; \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

20. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{3}{2x + 1} y'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2x + 1}} \\ 6y(0) - y'(0) = 1; \\ y'(1) = \sqrt{3} \end{cases}$$

21. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в 10 точках, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [-\pi; \pi]$:

$$\begin{cases} y''(x) - \cos x y'(x) + \sin x y(x) = \sin x \\ y(-\pi) = 2; \\ y(\pi) = 2 \end{cases}$$

22. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в 10 точках, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [-\pi; \pi]$:

$$\begin{cases} y''(x) - \cos x y'(x) + \sin x y(x) = \cos 2x \\ y(-\pi) = 2; \\ y(\pi) = 2 \end{cases}$$

23. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$,

$h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 3x^2 + x - 1 \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

24. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 3x^2 + x - 1 \\ y(0) = 0; \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

25. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 5x^2 \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

26. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 5x^{-}2x \\ y(0) = 0; \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

27. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2y'(x) - xy(x) = e^x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

28. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2y'(x) - xy(x) = e^x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

29. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2y'(x) - xy(x) = e^{x^2} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

30. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2y'(x) - xy(x) = e^{x^2} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

31. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2y'(x) - xy(x) = \sin x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

32. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2 y'(x) - xy(x) = \sin x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

33. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2 y'(x) - xy(x) = \cos x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

34. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2 y'(x) - xy(x) = \cos x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

35. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2 y'(x) - xy(x) = \tan x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

36. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + x^2 y'(x) - xy(x) = \tan x \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

37. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8} \\ y(0) = 0; \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

38. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 8x^2 - 8x + \dfrac{3}{2} \\ y(0) = 0; \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

39. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом прогонки в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 4x^2 - x + \dfrac{3}{2} \\ y(0) = 0; \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

40. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

41. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 8x^2 - 8x + \dfrac{3}{2} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

42. Знайти наближений розв'язок крайової задачі методом пристрілювання в точках $x_k = kh$, $h = 0.1$, $k = \overline{1, 10}$, $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 4x^2 - x + \dfrac{3}{2} \\ y(0) = 0; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$