Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

(для студентів факультету комп'ютерних наук
та кібернетики, ОП «Системний аналіз»)

Київ — 2020

УДК 528.11
ББК 22.19я73

Автор

Голубєва К.М.

Елементи теорії похибок (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, ОП «Системний аналіз»): Методичні розробки / Голубєва К.М., – Київ, 2020. – 22 с.

В методичних розробках розглянуті основні елементи теорії похибок, їх класифікація та способи розв'язання прямої та оберненої задач. Для переважної більшості методів наведені приклади їх застосування із розв'язками.

1. Класифікація похибок

В обчислювальній математиці найчастіше використовуються не точні величини, а їх наближені значення.

Похибкою називають величину, що характеризує точність результату. Їх можна поділити на групи.

1) Неусувні похибки – пов'язані із неточностями вхідних даних. Вона може бути пов'язана з

– похибками приладів, якими вимірювались результати експерименту (якщо вони використовуються при розв'язанні задачі);

– константами, які фігурують в постановці задачі (більшість фізичних констант визначаються лише наближено);

– невідповідностями математичної моделі реальній задачі (на практиці математичні формулювання відповідають ідеалізованим моделям, а при вивченні природних явищ доводиться брати умови, які спрощують задачу).

Назва «неусувна» відповідає її природі: вона не контролюється в процесі чисельного розв'язку задачі, а може бути зменшена лише за рахунок більш точного опису фізичної задачі та більш точного визначення параметрів.

2) Похибки методу – з'являються при застосуванні наближених методів замість точних, що робиться у випадках, коли для отримання точного розв'язку потрібно виконати необмежену чи неприйнятно велику кількість арифметичних операцій, що в багатьох випадках просто неможливо. Похибку методу можна регулювати, її намагаються звести до величини, яка в декілька разів менша за неусувну похибку. Подальше зниження є недоцільним, оскільки точність результатів не підвищується, проте збільшується обсяг обчислень.

3) Похибки обчислень – виникають під час введення та виведення даних в ЕОМ та виконання математичних операцій, що відбувається внаслідок заокруглень.

Для наближених методів питання стійкості відносно похибок займає важливе місце при виборі методу розв'язання. Перевага надається підходам з меншою кількістю розрахунків не лише для скорочення обсягу та часу обчислень, похибка на деякому кроці впливає на результати всіх наступних обчислень.

Якщо похибка, яка була зроблена на перших кроках обчислень, на подальших кроках не збільшується (при умові, що решта обчислень зроблені точно), або залишається того самого порядку, то обчислювальний процес називається *стійким* по відношенню до початкової похибки; якщо ця похибка зростає на кожному подальшому кроці, то процес обчислень називається *нестійким.*

Приклад. На гіпотетичній «десятковій» ЕОМ з мантисою довжиною 4 знаходять суму чисел від найменшого до найбільшого та в зворотньому напрямку від найбільшого до найменшого:

$$S = 0,2764 + 0,3944 + 1,475 + 26,46 + 1364.$$

В якому випадку обчислювальна похибка буде меншою?
Розв'язок. Знайдемо суму $\tilde{S}$ від найменшого до найбільшого:
$\tilde{S}_1 = 0,2764 + 0,3944 = 0,6708 \approx 0,671;$
$\tilde{S}_2 = 0,671 + 1,475 = 2,146 \approx 2,15;$
$\tilde{S}_3 = 2,15 + 26,46 = 28,61 \approx 29;$
$\tilde{S}_4 = 29 + 1364 = 1393;$
$\tilde{S} \approx 1393.$

Знайдемо суму $\overline{S}$ від найбільшого до найменшого:
$\overline{S}_1 = 1364 + 26,46 \approx 1364 + 26 = 1390;$
$\overline{S}_2 = 1390 + 1,475 \approx 1390 + 1 = 1391;$
$\overline{S}_3 = 1391 + 0,3944 \approx 1391 + 0 = 1391;$
$\overline{S}_4 = 1391 + 0,2764 \approx 1391 + 0 = 1391;$
$\overline{S} \approx 1391.$

Знайдемо точне значення суми (будемо вважати, що мантиса не обмежена 4 розрядами):

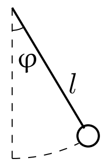
$S = 0,2764 + 0,3944 + 1,475 + 26,46 + 1364 = 1392,6058 \approx 1393.$

Отже, похибка менша при додаванні від найменших чисел до найбільших.

Дійсно, для запобігання зростання обчислювальної похибки обчислення проводять починаючи з найменших по модулю значень.

4) Повна похибка – сума всіх похибок, які виникають при розв'язанні конкретної задачі. Для довільної задачі відбувається накопичення похибок різного походження. Оцінка величини повної похибки є достатньо складною задачею, тому зазвичай обмежуються дослідженням похибок окремих типів.

Приклад. Розглянемо маятник, який починає рух в момент часу $t = t_0$. Необхідно знайти кут відхилення φ від вертикалі в момент часу t_1. Проілюструємо виникнення похибок різних типів, які з'являться при розв'язанні задачі.



Пояснення. Диференційне рівняння, яке описує коливання маятника, береться у вигляді

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\sin\varphi + \mu\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

де l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння, μ – коефіцієнт тертя.

Оскільки математична модель не повністю відповідає опису фізичної задачі, розв'язок буде включати в собі неусувну похибку. Інші складові неусувної похибки з'вляться при визначенні g, μ, l, t_0, $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$.

Якщо розглянути диференційне рівняння, то можна бачити, що воно не роз'язується в явному вигляді, необхідно застосовувати чисельні методи, отже матиме місце похибка методу.

При реалізації наближеного методу на ЕОМ в результаті проведення обчислень також виникне похибка обчислень.

2. Основні означення

Нехай x – точне значення деякої величини, x^* – її відоме наближене значення.

Абсолютною похибкою числа x^* називається величина $\Delta(x^*)$, що задовольняє умові

$$\Delta(x^*) \geqslant |x - x^*|. \qquad (1)$$

В цьому випадку число x можна подати у вигляді

$$x = x^* \pm \Delta(x^*). \qquad (2)$$

Відносною похибкою числа x^* називається величина $\delta(x^*)$, що задовольняє умові

$$\delta(x^*) \geqslant \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right|. \qquad (3)$$

Число x можна подати у вигляді $x = x^*\,(1 \pm \delta(x^*))$, але цей запис практично не використовується, відносну похибку часто виражають у відсотках.

Значення абсолютної похибки буде змінюватися при переході від одних одиниць вимірювання до інших, крім того відносна похибка краще характеризує точність результату, що робить її більш універсальною.

Приклад. Визначити, яка рівність точніша $2/21 = 0,095$ або $\sqrt{22} = 4,69$.

Розв'язок. Враховуючи, що $2/21 \approx 0,095238$, $\sqrt{22} \approx 4,690416$, введемо позначення $x_1 = 0,095238$, $x_1^* = 0,095$, $x_2 = 4,690416$, $x_2^* = 4,69$. Для того щоб визначити, яка рівність точніша, порівняємо відносні похибки чисел:

$$\delta(x_1^*) = \left| \frac{0,095238 - 0,095}{0,095} \right| \cdot 100\% \approx 0,25\%;$$

$$\delta(x_2^*) = \left| \frac{4,690416 - 4,69}{4,69} \right| \cdot 100\% \approx 0,009\%.$$

Отже, рівність $\sqrt{22} = 4,69$ точніша.

Значущими цифрами числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.

Приклад. Визначити значущі цифри числа 0,001230.
Розв'язок. Значущими будуть всі цифри, починаючи з одиниці: 1, 2, 3, 0.

Приклад. Визначити значущі цифри числа 123000.
Розв'язок. Значущими будуть всі цифри, починаючи з одиниці: 1, 2, 3, 0, 0, 0.

Якщо в цілій частині числа є не значущі цифри, то число заокруглють до останньої значущої та записують за допомогою порядку.

Приклад. Записати число 123000, якщо в ньому а) три, б) дві значущі цифри.
Розв'язок. а) 123×10^3, б) 12×10^4.

Значуща цифра називається *правильною*, якщо абсолютна похибка числа не перевищує половини одиниці розряду, що відповідає цій цифрі (інколи беруть цілу одиницю розряду), в протилежному випадку її називають *сумнівною.*

Приклад. Визначити правильні цифри числа 0,001230, якщо його абсолютна похибка 10^{-4}.
Розв'язок. Позначимо $x^* = 0,001230$, $\Delta(x^*) = 10^{-4}$. Будемо перевіряти значущі цифри за означенням:
«1»: $10^{-4} \leqslant 0,5 \times 10^{-3} \Rightarrow$ цифра «1» – правильна;
«2»: $10^{-4} > 0,5 \times 10^{-4} \Rightarrow$ цифра «2» – сумнівна.

Всі подальші цифри також будуть сумнівними (які стоять праворуч від сумнівної цифри).

Отже, цифра «1» – правильна.

Приклад. Якою буде похибка, якщо число π наблизити числом 3,14?
Розв'язок. Знайдемо абсолютну і відносну похибки, для цього візьмемо число π з більшою кількістю значень: $\pi \approx 3,14159$.

$$\Delta(\pi^*) = |3,14 - 3,14159| = 0,00159,$$

$$\delta(\pi^*) = \frac{0,00159}{3,14} \cdot 100\% = 0.05\%.$$

Отже, абсолютна похибка дорівнює $1,59 \times 10^{-3}$ та відносна $0,05\%$.

3. Пряма задача теорії похибок

На практиці найчастіше маємо справу не з окремими величинами, а з функціями. Пряма задача теорії похибок полягає в знаходженні точності функції за відомими наближеними значеннями (або похибками) аргументів.

В деякій області $G \in \mathbb{R}^n$ розглядають неперервно диференційовну функцію $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Необхідно обчислити значення функції в точці $(x_1, x_2, ..., x_n) \in G$, але відомі лише наближені значення $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in G$. Обчислимо наближене значення $y^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та оцінимо його похибку.

Оцінку абсолютної похибки функції обчислюють за формулою:

$$\Delta(y^*) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i^*), \tag{4}$$

тоді відносну похибку функції можна знайти:

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|y^*|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i^*) \Big/ \left| f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \right|. \tag{5}$$

Приклад. Для заданої функції $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 z}{y^3}$ оцінити похибку обчислення, якщо $x = 0,15 \pm 0,005$, $y = 2,13 \pm 0,01$, $z = 1,14 \pm 0,007$.

Розв'язок. Оскільки необхідно знайти абсолютну похибку функції, значить задача пряма, скористаємось формулою (4), будемо враховувати, що відповідно до представлення (2) нам відомі абсолютні похибки аргументів та їх наближені значення.

$$\Delta(f^*) \leqslant \left| \frac{2x^* z^*}{(y^*)^3} \right| \Delta(x^*) + \left| -\frac{3(x^*)^2 z^*}{(y^*)^4} \right| \Delta(y^*) + \left| \frac{(x^*)^2}{(y^*)^3} \right| \Delta(z^*) =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 1,14}{2,13^3} \cdot 0,005 + \frac{3 \cdot 0,15^2 \cdot 1,14}{2,13^4} \cdot 0,01 + \frac{0,15^2}{2,13^3} \cdot 0,007 \approx$$

$$\approx 0,00023063 \approx 2,3 \times 10^{-4}.$$

Знайдемо відносну похибку функції за формулою (5), для цього спочатку знайдемо наближене значення функції:

$f(x^*, y^*, z^*) = \dfrac{(x^*)^2 z^*}{(y^*)^3} = \dfrac{0,15^2 \cdot 1,14}{2,13^3} \approx 0,00265429,$

$\delta(f^*) = \dfrac{0,00023063}{0,00265429} \cdot 100\% \approx 8,7\%.$

Отже, $\Delta(f^*) \approx 2,3 \times 10^{-4}$, а $\delta(f^*) \approx 8,7\%$.

4. Похибки математичних операцій

За допомогою формул (4) та (5) визначимо похибки результатів основних математичних операцій. Будемо розглядати найпростіші випадки, покладемо, $x_1 > x_2 > 0$; $m \in \mathbb{N}$.

Похибка суми. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, абсолютна похибка суми:

$$\Delta(y^*) \leqslant \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*); \tag{6}$$

відносна похибка суми:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)}{|x_1^* + x_2^*|} = \frac{\Delta(x_1^*) \cdot |x_1^*|}{|x_1^* + x_2^*| \cdot |x_1^*|} + \frac{\Delta(x_2^*) \cdot |x_2^*|}{|x_1^* + x_2^*| \cdot |x_2^*|} =$$

$$= \left|\frac{x_1^*}{x_1^* + x_2^*}\right| \delta(x_1^*) + \left|\frac{x_2^*}{x_1^* + x_2^*}\right| \delta(x_2^*).$$

Похибка різниці. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, абсолютна похибка різниці:

$$\Delta(y^*) \leqslant \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*); \tag{7}$$

відносна похибка різниці:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)}{|x_1^* - x_2^*|} = \frac{\Delta(x_1^*) \cdot |x_1^*|}{|x_1^* - x_2^*| \cdot |x_1^*|} + \frac{\Delta(x_2^*) \cdot |x_2^*|}{|x_1^* - x_2^*| \cdot |x_2^*|} =$$

$$= \left|\frac{x_1^*}{x_1^* - x_2^*}\right| \delta(x_1^*) + \left|\frac{x_2^*}{x_1^* - x_2^*}\right| \delta(x_2^*).$$

Похибка добутку. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$, абосолютна похибка добутку:

$$\Delta(y^*) \leqslant |x_2^*| \cdot \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \cdot \Delta(x_2^*);$$

відносна похибка добутку:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{|x_2^*| \cdot \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \cdot \Delta(x_2^*)}{|x_1^* \cdot x_2^*|} = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \qquad (8)$$

Похибка частки. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 \div x_2$, абсолютна похибка частки:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{1}{x_2^*}\right| \Delta(x_1^*) + \left|\frac{-x_1^*}{(x_2^*)^2}\right| \Delta(x_2^*) = \frac{|x_2^*| \cdot \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \cdot \Delta(x_2^*)}{(x_2^*)^2};$$

відносна похибка частки:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{|x_2^*|\Delta(x_1^*) + |x_1^*|\Delta(x_2^*)}{(x_2^*)^2} \div \left|\frac{x_1^*}{x_2^*}\right| = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \qquad (9)$$

Похибка логарифма. Розглянемо $y = f(x) = \ln x$, абсолютна похибка логарифма:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta(x^*) = \left|\frac{1}{x^*}\right| \cdot \Delta(x^*) = \delta(x^*); \qquad (10)$$

відносна похибка логарифма:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\delta(x^*)}{|\ln x^*|}.$$

Похибка степеня. Розглянемо функцію $y = f(x) = x^m$, абсолютна похибка степеня:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta(x^*) = \left|m \cdot (x^*)^{m-1}\right| \cdot \Delta(x^*);$$

відносна похибка степеня:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\left|m \cdot (x^*)^{m-1}\right| \cdot \Delta(x^*)}{|(x^*)^m|} = m \cdot \delta(x^*). \qquad (11)$$

Похибка кореня. Розглянемо функцію $y = f(x) = \sqrt[m]{x}$, абсолютна похибка кореня:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta(x^*) = \left|\frac{1}{m \cdot \sqrt[m]{(x^*)^{m-1}}}\right| \cdot \Delta(x^*);$$

відносна похибка кореня:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\Delta(x^*)}{|m \cdot \sqrt[m]{(x^*)^{m-1}}|} \div |\sqrt[m]{x^*}| = \frac{\delta(x^*)}{m}. \qquad (12)$$

Зауваження. У разі віднімання близьких по модулю чисел відносна похибка результату може значно зрости, а в разі ділення на досить мале число надмірно зростатиме абсолютна похибка. В таких випадках при обчисленнях намагаються при можливості уникати таких операцій за рахунок інших. Наприклад, об'єм тонкого шару між концентричними сферами з радіусами R та $(R+a)$, якому відповідає формула $V=\dfrac{4}{3}\pi\Big((R+a)^3-R^3\Big)$, необхідно обчислювати після зведення його до вигляду $V=\dfrac{4}{3}\pi\big(3R^2a+3Ra^2+a^3\big)$.

Зауваження. При розв'язанні задач дуже зручно запам'ятати та використовувати формули (6) - (12), решта формул на практиці не використовується.

5. Обернена задача теорії похибок

Обернена задача формулюється таким чином: з якою точністю потрібно задати значення аргументів x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$, щоб похибка значення функції $f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ не перевищувала заданої величини ε?

Функція однієї змінної. Для функції однієї змінної вигляду $y=f(x)$ абсолютну похибку можна обчислити за формулою

$$\Delta(x^*)=\frac{\Delta(y^*)}{|f'(x^*)|}\leqslant\frac{\varepsilon}{|f'(x^*)|}. \tag{13}$$

Функція багатьох змінних. Для функції декількох змінних $y=f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ для розв'язання оберненої задачі існує такі підходи.

1) Принцип рівних впливів. В основі цього підходу лежить припущення про рівність доданків $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta(x_i^*)$, $i=\overline{1,n}$ між собою. Тоді абсолютні похибки аргументів можна визначити за формулою:

$$\Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{n\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|}, \quad \text{де } i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

2) Рівні абсолютні похибки. Якщо вважати абсолютні похибки аргументів рівними, то їх можна знайти таким чином:

$$\Delta(x_1^*) = \Delta(x_2^*) = ... = \Delta(x_n^*) = \frac{\Delta(y^*)}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right| + ... + \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|}. \tag{15}$$

Приклад. Знайти абсолютні та відносні похибки аргументів, які дають змогу обчислити з 4 правильними значущими цифрами значення функції $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + x_2^2}{x_3}$, де $x_1^* = 2,10415$, $x_2^* = 1,93521$, $x_3^* = 0,84542$.

Розв'язок. Оскільки задається точність функції, а необхідно знайти точність аргументів, то це обернена задача. В задачі три аргумента – функція багатьох змінних, припустимо, що діє принцип рівних впливів і скристаємось формулою (14).

Функція задається 4 правильними цифрами, знайдемо її наближене значення, щоб знайти кількість правильних цифр в числі після коми.

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \frac{x_1^* + (x_2^*)^2}{x_3^*} = \frac{2,10415 + 1,93521^2}{0,84542} \approx 6.9187.$$

В числі три правильні цифри після коми, тому за означенням $\Delta(f^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-3}$.

$$\Delta(x_1^*) = \frac{\Delta(f^*)}{3\left|\dfrac{1}{x_3^*}\right|} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \dfrac{1}{0,84542}} \approx 1,409 \times 10^{-4};$$

$$\delta(x_1^*) = \frac{\Delta(f^*)}{|f^*|} \cdot 100\% = \frac{1,409 \cdot 10^{-4}}{6.9187} \cdot 100\% \approx 0,002\%;$$

$$\Delta(x_2^*) = \frac{\Delta(f^*)}{3\left|\dfrac{2x_2^*}{x_3^*}\right|} = \frac{0,5\cdot 10^{-3}}{3\cdot\dfrac{2\cdot 1,93521}{0,84542}} \approx 3,641\times 10^{-5};$$

$$\delta(x_2^*) = \frac{\Delta(f^*)}{|f^*|}\cdot 100\% = \frac{3,641\cdot 10^{-4}}{6.9187}\cdot 100\% \approx 0,005\%;$$

$$\Delta(x_3^*) = \frac{\Delta(f^*)}{3\left|-\dfrac{x_1+x_2^2}{(x_3^*)^2}\right|} = \frac{0,5\cdot 10^{-3}}{3\cdot\dfrac{2,10415+1,93521^2}{0,84542^2}} \approx 2,037\cdot 10^{-5};$$

$$\delta(x_3^*) = \frac{\Delta(f^*)}{|f^*|}\cdot 100\% = \frac{2,037\cdot 10^{-5}}{6.9187}\cdot 100\% \approx 0,0003\%.$$

Приклад. Якою кількістю правильних значущих цифр необхідно задати аргументи, щоб обчислити з 3 правильними значущими цифрами значення функції $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y} + 3z$, де $x^* = 2,37208$, $y^* = 4.02301$, $z^* = 1.56172$.

Розв'язок. Оскільки задається точність функції, а необхідно знайти точність аргументів, то це обернена задача. В задачі три аргумента – функція багатьох змінних. Оскільки значення аргументів одного порядку, скристаємось формулою (15), її точності буде достатньо для визначення правильних цифр.

Функція задається 3 правильними цифрами, знайдемо її наближене значення, щоб знайти кількість правильних цифр в числі після коми.

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{y} + 3z = \frac{2,37208^2}{4.02301} + 3\cdot 1.56172 \approx 6.084.$$

В числі дві правильні цифри після коми, тому за означенням $\Delta(f^*) \leqslant 0,5\times 10^{-2}$.

$$\Delta(x^*) = \Delta(y^*) = \Delta(z^*) = \frac{\Delta(f^*)}{\left|\dfrac{2x^*}{y^*}\right| + \left|-\dfrac{(x^*)^2}{(y^*)^2}\right| + 3} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 10^{-2}}{\dfrac{2\cdot 2,37208}{4.02301} + \dfrac{2,37208^2}{4.02301^2} + 3} \approx 0,11\times 10^{-2};$$

Визначимо правильні цифри аргументів:
$0,11 \times 10^{-2} \leqslant 0,5 \times 10^{-2} \Rightarrow$ дві цифри після коми правильні.

Отже, аргументи необхідно задати 3 правильними значущими цифрами (2 правильними цифрами після коми).

6. Розв'язання задач

Процес розв'язання задач з теорії похибки умовно можна поділити на етапи:
I) побудова математичної моделі (перехід від опису постановки задачі до математичних символів);
II) визначення типу задачі (пряма чи обернена)

– *якщо задача пряма:*

1) за можливістю використовуються найпростіші формули похибок основних математичних операцій (6)-(12);

2) якщо в задачі функція містить різні типи операцій, то найчастіше використання формул (6)-(12) є недоцільним, отже використовують формули (4)-(5);

– *якщо задача обернена*, то необхідно визначити кількість змінних:

1) якщо змінна одна, то використовується формула (13);

2) якщо змінних дві і більше, то необхідно обрати підхід до розв'язання задачі (принцип рівних впливів або рівність абсолютних похибок):

а) за можливістю використовуються найпростіші формули похибок основних математичних операцій (6)-(12);

б) якщо формули (6)-(12) використати неможливо, то застосовують формули (14) або (15) в залежності від обраного принципу;

III) формулювання результатів відповідно до початкової постановки задачі.

Приклад. Сторона квадрата дорівнює 2 м. З якою точністю потрібно її виміряти, щоб похибка обчислення площі квадрата не перевищує 1 см^2?

Розв'язок. Введемо позначення: a – сторона квадрата, S – його площа, $S = a^2$, $a = 2$ м $= 200$ см, $\Delta(S^*) = 1$ см^2. Оскільки задається точність функції, а необхідно знайти точність аргументів, то задача обернена. Оскільки аргумент один, то використаємо формулу (13).

$$\Delta(a^*) = \frac{\Delta(S^*)}{|2 \cdot a^*|} = \frac{1}{2 \cdot 200} = 2,5 \times 10^{-3};$$

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \cdot 100\% = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{200} \cdot 100\% = 0,00125\%$$

Отже, абсолютна похибка дорівнює $2,5 \times 10^{-3}$, а відносна – $0,00125\%$.

Приклад. Висота і радіус основи циліндра виміряно з точністю $0,5\%$. Чому дорівнює відносна похибка в разі обчислення об'єму циліндра, якщо $\pi^* = 3,14$?

Розв'язок. Введемо позначення: h – висота цилінра, r – радіус основи, V – його площа, $V = \pi h r^2$, $\delta(h^*) = \delta(r^*) = 0,5\%$. Оскільки задається точність аргументів, а необхідно знайти точність функції, то задача пряма. Оскільки необхідно знайти лише відносну похибку, а в функції операція множення, то зручно використати формулу (8), для цього знайдемо відносну похибку числа π:

$$\delta(\pi^*) = \left|\frac{\pi - \pi^*}{\pi^*}\right| = \frac{3,14159 - 3,14}{3,14} \cdot 100\% = 0,05\%;$$

$$\delta(V^*) = \delta(\pi^*) + \delta(h^*) + 2\delta(r^*) = 0,05 + 0,05 + 2 \cdot 0,05 = 1,55\%.$$

Отже, відносна похибка об'єму – $1,55\%$.

Приклад. Нехай числа задані 10 правильними значущими цифрами: $\sqrt{2,01} \approx 1,417744688$ та $\sqrt{2} \approx 1,414213562$. Скільки правильних значущих цифр має число $\sqrt{2,01} - \sqrt{2}$?

Розв'язок. Для зручності введемо позначення $x_1 = \sqrt{2,01}$, $x_1^* = 1,417744688$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_2^* = 1,414213562$, $x = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$. Оскільки задаються значення аргументів, а необхідно оцінити функцію, то задача пряма.

Для визначення правильних цифр в числі x^* за означенням необхідно мати його абсолютну похибку та саме число:

$$x^* = x_1^* - x_2^* = 1,417744688 - 1,414213562 = 0,003531126.$$

Знайдемо абсолютні похибки x_1^* та x_2^* з умови, що вони задаються 10 правильними цифрами:

$$\Delta(x_1^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-9}; \quad \Delta(x_2^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-9},$$

тоді використавши абсолютні похибки аргументів за формулою (7) знайдемо абсолютну формулу функції:

$$\Delta(x^*) \leqslant \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*) = 10^{-9}.$$

Визначимо правильні цифри числа $x^* = 0,003531126$:
«6»: $10^{-9} > 0,5 \times 10^{-9} \Rightarrow$ цифра «6» – сумнівна;
«2»: $10^{-9} \leqslant 0,5 \times 10^{-8} \Rightarrow$ цифра «2» – правильна.

Всі подальші цифри також будуть правильними (які стоять ліворуч від правильної цифри).

Отже, цифра «3»,«5»,«3»,«1»,«1»,«2» – правильні.

Приклад. З якою кількістю правильних цифр потрібно взяти вільний член квадратного рівняння $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$, щоб отримати корені рівняння з 4 правильними значущими цифрами?
Розв'язок. Введемо позначення: $z = \lg 2 \approx 0,301029996$ – вільний член квадратного рівняння, $x = 1 + \sqrt{1 - \lg 2} \approx 1,836$ – один з коренів рівняння, який будемо розглядати (для іншого розв'язок будується аналогічно). Оскільки задається точність кореня (функції x), а необхідно оцінити точність $\lg 2$ (аргумента z), то задача обернена з одною змінною. Тому застосуємо формулу (13), для якої за означенням правильної цифри знайдемо абсолютну похибку функції: $\Delta(x^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-3}$ (корінь задається 4 правильними цифрами, 3 з них після коми).

$$\Delta(z^*) = \Delta(x^*) \div \frac{1}{2\sqrt{1 - z^*}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - 0,3} \approx 0,8 \times 10^{-3}.$$

Абсолютну похибку знайшли з низькою точністю, оскільки в задачі вона потрібна для знаходження правильних цифр числа $\lg 2 \approx 0,301029996$:
«1»: $0,8 \times 10^{-3} > 0,5 \times 10^{-3} \Rightarrow$ цифра «1» – сумнівна;

«0»: $0,8 \times 10^{-3} \leqslant 0,5 \times 10^{-2} \Rightarrow$ цифра «0» – правильна і всі значущі зліва.

Отже, для обчислення першого кореня з 4 значущими цифрами, необхідно взяти $\lg 2$ з 2 правильними цифрами після коми.

7. Задачі для самостійного розв'язання

1. Нехай $x^* = 17,124$, $\Delta(x^*) = 0,04$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

2. Нехай $x^* = 3,153276$, $\Delta(x^*) = 0,6 \times 10^{-3}$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

3. Нехай $x^* = 0,027045$, $\Delta(x^*) = 0,008$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

4. Нехай $x^* = 0,368125$, $\Delta(x^*) = 0,021$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

5. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до трьох значущих цифр числа -0,1725.

6. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до двох значущих цифр числа 1,2485.

7. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до чотирьох значущих цифр числа 73,568.

8. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до чотирьох значущих цифр числа 2031,51.

9. Визначити правильні значущі цифри числа 37,153, якщо його відносна похибка 10%.

10. Визначити правильні значущі цифри в числі 2,9372, якщо його відносна похибка 0,1%.

11. Визначити правильні значущі цифри в числі 28710, якщо його відносна похибка 1%.

12. Визначити правильні значущі цифри в числі 826,3, якщо його відносна похибка 0,05%.

13. З якою кількістю правильних значущих цифр необхідно взяти число e (основа натурального логарифму), щоб похибка не перевищувала $0,05\%$?

14. З якою кількістю правильних значущих цифр необхідно взяти універсальну газову сталу R, щоб похибка не перевищувала $0,1\%$?

15. Якою буде похибка, якщо число g (прискорення вільного падіння) наблизити числом 9,81?

16. Якою буде похибка, якщо швидкість світла c наблизити числом 3×10^8?

17. Визначити, яка рівність точніша: $6/7 = 0.857$ або $\sqrt{4.8} = 2.19$.

18. Визначити, яка рівність точніша: $17/19 = 0.895$ або $\sqrt{52} = 7.21$.

19. Визначити, яка рівність точніша: $49/13 = 3.77$ або $\sqrt{14} = 3.74$.

20. Визначити, яка рівність точніша: $2/9 = 0.22$ або $\sqrt{0.05} = 0.22$.

21. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x, y, z) = \dfrac{x + y^2}{z}$, якщо $x = 3.15$, $y = 0.831$, $z = 1.123$ і всі значущі цифри вхідних даниї є правильними.

22. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x} + y}{z^2}$, якщо $x = 4 \pm 0.1$, $y = 3 \pm 0.05$, $z = 1 \pm 0.08$.

23. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x, y) = \ln x + y^2$, якщо $x = 0.925$, $y = 1.123$ і відомо, що аргументи мають дві правильні цифри.

24. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x, y, z) = \ln \dfrac{xy}{z}$, якщо $x = 2.34 \pm 0.02$, $y = 1.25 \pm 0.02$, $z = 3.05 \pm 0.02$.

25. При знаходженні найменшого кореня квадратного рівняння $x^2 - 140x + 1 = 0$ можна використати одну з формул: $x = 70 - \sqrt{4899}$ або $x = \dfrac{1}{70 + \sqrt{4899}}$. Яка з формул дає більш точний результат і на скільки, якщо при обчисленні використовувати 4 значущі цифри після коми?

26. З якою кількістю правильних значущих цифр потрібно взяти $\sqrt{3,02}$ та $\sqrt{3}$, щоб обчислити $\sqrt{3,02} - \sqrt{3}$ з трьома правильними значущими цифрами?

27. У п'ятизначних логарифмічних таблицях наведено значення логарифмів із точністю до $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-6}$. Оцінити можливу похибку в разі визначення числа за його логарифмом, якщо саме число лежить у межах між 300 та 400.

28. Відомо, що гіперболічний сінус та гіперболічний косінус числа 3 можна записати: $\operatorname{ch} 3 = \dfrac{e^3 + e^{-3}}{2} \approx 10.067$, $\operatorname{sh} 3 = \dfrac{e^3 - e^{-3}}{2} \approx 10.018$, де всі цифри правильні. Оцінити похибкь при визначенні e^{-3} через гіперболічні сінус та косінус: $e^{-3} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 3 + \operatorname{sh} 3}$.

29. Знайти абсолютну похибку визначення кута 60° за п'ятизначними таблицями синусів (в таблицях наведені синуси з 5 правильними значущими цифрами).

30. З якою точністю необхідно обчислити $\sin \dfrac{\pi}{8}$, щоб відносна похибка обчислення коренів рівняння $x^2 - 2x + \sin \dfrac{\pi}{8} = 0$ не перевищувала 10^{-3}?

31. Корені рівняння $x^2 - 2 \operatorname{tg} 2 \cdot x + e = 0$ необхідно обчислити з трьома правильними цифрами. Скільки правильних значущих цифр треба взяти для $\operatorname{tg} 2$ і e?

32. Яка відносна похибка обчислення площі сектора кола радіусом $R = 21.53 \pm 0.005$ см, кута $\alpha = 137^\circ(25 \pm 1)'$, якщо число π взято з чотирма правильними знаками? Обчислити цю площу.

33. Катет прямокутного трикутника дорівнює $a = 21.12 \pm 0.01$ см, а його гіпотенуза $c = 37.51 \pm 0.01$ см. Обчислити синус кута, протилежного до катета a та оцінити похибки результату.

Список використаної літератури

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
2. Буслов В.А., Яковлев С.Л. Численные методы. 1. Исследование функций. — Санкт-Петербург: С-Петерб. гос. ун-т, 2001. — 59 с.
3. Вержбицкий В.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
4. Волков Е.А. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
5. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. — К.: Вища школа, 1995. — 367 с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
7. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 2000. — 190 с.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
9. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2008. — 480 с.
10. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972. — 368с.
11. Методические указания и учебные задания к практикуму по численному интегрированию и методам решения задачи Коши для студентов третьего курса факультета

кибернетики / специальность 0647 – прикладная математика / Макаров В.Л., Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П. и др. — Киев: КГУ, 1984. — 69 с.

12. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. — Киев: Наукова думка, 1987. — 288 с.

13. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 272 с.

14. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам: учебное пособие. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 208 с.

15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

16. Сборник задач по методам вычислений / Азаров А.И., Басик В.А., Кремень Ю.А. и др. — Минск: Изд-во БГУ, 1983. — 287 с.

17. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. — М.: Физматлит, 2003. — 304 с.

18. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.

19. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.

ЗМІСТ