Інтегрування раціональних функцій

Означення. ***Раціональна функція однієї змінної*** (або ж ***дробово-раціональна функція***) — це алгебраїчний вираз, що є відношенням двох многочленів, коефіцієнти яких належать множині дійсних чисел, тобто має вигляд:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0},$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — сталі, m та n — невід'ємні цілі числа.

- Якщо $m \geqslant n$, то дріб зветься ***неправильним***.

- Кожен неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена $W(x)$ (ціла частина) та ***правильного*** дробу $\left(\frac{R}{Q}\right)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

- З класу правильних дробів виділяють 4 типи основних ***елементарних дробів***: $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+2px+q}$ та $\frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^n}$, де $a, p, q, M, N \in \mathbb{R}$, а $n > 1$ — ціле число. При цьому $x^2 + 2px + q$ не має дійсних коренів у випадку, якщо дискримінант $D < 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 - q < 0 \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; q - p^2 > 0$.

Розвинення правильних дробів на прості

Вигляд розвинення правильних дробів на прості залежить від розвинення многочлена $Q_n(x)$ на множники. Кожен многочлен n-го степеня з дійсними коефіцієнтами і коефіцієнтом 1 при x^n можна однозначно представити у вигляді співмножників виду $x-a$ та x^2+px+q. У загальному вигляді:

$$Q_n(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_rx+q_r)^{m_r},$$

де $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k\in\mathbb{R}$ — корені многочлена $Q_n(x)$; n_i, $i=\overline{1,k}$ — кратності коренів a_i; $p_j,q_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,r}$ — коефіцієнти тричленів; m_j, $j=\overline{1,r}$ — кратності квадратичних тричленів. При цьому $\sum\limits_{i=1}^{k}n_i+2\sum\limits_{j=1}^{r}m_j=n$.

Інтегрування раціональних функцій

Будь-який **правильний (!)** раціональний дріб єдиним способом розкладається на скінченне число елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{x-a_1} + \frac{B_1}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{n_2-1}} +$$
$$+ \ldots + \frac{B_{n_2}}{x-a_2} + \ldots + \frac{K_1}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{K_2}{(x-a_k)^{n_k-1}} + \ldots + \frac{K_{n_k}}{x-a_k} + \ldots +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1}} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{x^2+p_rx+q_r}.$$

Для того, щоб визначити невідомі коефіцієнти, множимо обидві частини на $Q_n(x)$. Із рівності многочленів у лівій і правій частинах рівності випливає рівність коефіцієнтів при однакових степенях x. Прирівнюємо їх і отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод знаходження коефіцієнтів розвинення правильного раціонального дробу у суму простих дробів називається ***методом невизначених коефіцієнтів***.