Класифікація функцій одного аргументу

В залежності від характеру дій, які потрібно виконати над значенням аргументу, щоб отримати відповідне значення функції, встановлена наступна класифікація функцій.

1. Якщо над значенням аргумента і деякими сталими виконуються дії: “+”, “-”, “×”, піднесення в цілу і додатню степінь (скінченну кількість разів), то в результаті отримується ціла ***раціональна функція*** або ***многочлен***:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m, \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad a_i \in \mathbb{R},\, i = \overline{1, m}.$$

2. Функція, яка представлена у вигляді частки від ділення двох цілих раціональних функцій, називається ***дробово-раціональною функцією***:

$$P(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n}$$

Сукупність цілих раціональних і дробово-раціональних функцій утворює клас ***раціональних функцій***.

3. Якщо над аргументом x крім п’яти перерахованих алгебраїчних дій виконується дія здобування кореня скінченну кількість разів і результат не є раціональною функцією, то отримується ***ірраціональна функція***:

$$f(x) = \left(\sqrt[7]{x} + x + 2\right)^5 - \sqrt[3]{\frac{17x^3 - 5x + 2}{9x^2 + 3x - 1}}.$$

Сукупність раціональних та ірраціональних функцій утворює клас ***алгебраїчних функцій***.

4. Всяка *неалгебраїчна* функція називається ***трансцендентною функцією***. Елементарними трансцендентними функціями є:

а) показникова функція a^x, де $a > 0$, $a \neq 1$;

б) логарифмічна функція $\log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$;

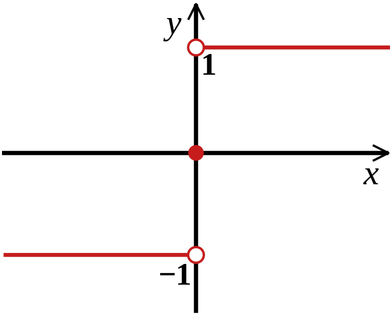
в) тригонометричні функції: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$;

г) обернені тригонометричні функції: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccosec} x$.

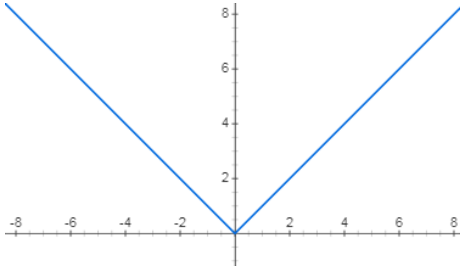
Функції, що є алгебраїчними, елементарними трансцендентними, або їх скінченними комбінаціями, звуться ***елементарними***. Це основний запас функцій, які будемо використовувати в курсі.

Крім цього, наведемо деякі інші важливі функції, що також будуть часто з'являтися у курсі математичного аналізу:

• $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ — ***сигнум*** (*знак*):



• $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ — ***модуль*** (*абсолютна величина*):



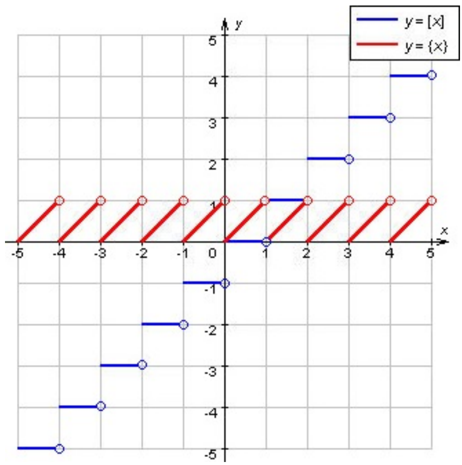
Останні дві функції пов'язує формула: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

• $[x]$ — ***ціла частина*** числа x (***антʼє***), наприклад, $[4{,}25] = 4$, $[-\pi] = -4$, $[0{,}999] = 0$;

• $\{x\} = x - [x]$ — ***дробова частина*** числа x, наприклад: $\{5{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$, $\{-0{,}7\} = 0{,}3$;

• ***функція Діріхле***:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

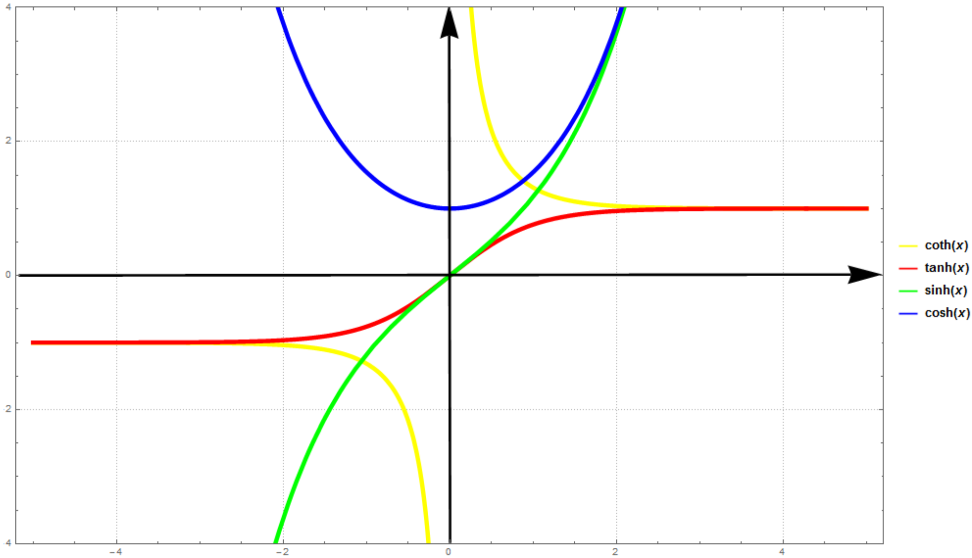


• $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — ***синус гіперболічний***;

• $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — ***косинус гіперболічний***;

• $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — ***тангенс гіперболічний***;

• $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — ***котангенс гіперболічний***.



4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4
coth(x)
tanh(x)
sinh(x)
cosh(x)