

1. Метод Штрассена

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}),$$

$$P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11},$$

$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}),$$

$$P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}),$$

$$P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22},$$

$$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}),$$

$$P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),$$

$$C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7,$$

$$C_{12} = P_3 + P_5,$$

$$C_{21} = P_2 + P_4,$$

$$C_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6.$$

2. Метод Вінограда

$$A_i = \sum_{k=1}^{n/2} a_{i,2k-1} a_{i,2k},$$

$$B_j = \sum_{k=1}^{n/2} b_{2k-1,j} b_{2k,j},$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n/2} (a_{i,2k-1} + b_{2k,j})(a_{i,2k} + b_{2k-1,j}) - A_i - B_j.$$

3. Метод Копперсмита-Вінограда

див. статтю, що буде надіслана окремо

5. Метод спряжених градієнтів

$$Ax = f$$

u_0 – довільне початкове наближення,

$$u_1 = (A - \tau_1 A)u_0 + \tau_1 f,$$

...

$$u_{k+1} = \alpha_{k+1}(E - \tau_{k+1}A)u_k + (1 - \alpha_{k+1})u_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}f,$$

де

$$r_k = f - Au_k \text{ – нев'язка,}$$

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)},$$

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_{k+1} = \left[1 - \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \cdot \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})} \right]^{-1}, k = 1, 2, \dots$$

Якщо всі обчислення виконуються точно, метод спряжених градієнтів є прямим, тобто приводить до розв'язку рівно за n кроків. Якщо обчислення є заокругленими, метод стає ітераційним. Ітерації слід припинити, коли нев'язка стає менше наперед заданого рівня точності.

$$c_2 = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}, \quad s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}},$$

а третє рівняння, отримується при додаванні результатів множення тих самих рівнянь на $-s_2$ і c_2 . Отримуємо систему

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \dots + a_{1m}^{(2)}x_m &= f_1^{(2)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(2)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)}x_m &= f_3^{(1)}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \dots + a_{4m}x_m &= f_4, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= f_m, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(2)} &= c_2 a_{1j}^{(1)} + s_2 a_{3j} & j &= 1, 2, \dots, m, & f_1^{(2)} &= c_2 f_1^{(1)} + s_2 f_3; \\ a_{3j}^{(1)} &= -s_2 a_{1j}^{(1)} + c_2 a_{3j} & j &= 2, 3, \dots, m, & f_3^{(1)} &= -s_2 f_1^{(1)} + c_2 f_3. \end{aligned}$$

Виконавши перетворення $m-1$ раз, прийдемо до системи

$$\begin{aligned} a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + \dots + a_{1m}^{(m-1)} &= f_1^{(m-1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Далі за цим алгоритмом перетвориться матриця

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned}$$

тощо.

У результаті $m-1$ етапів прямого ходу система буде приведена до трикутного виду.

$$\begin{aligned} a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + \dots + a_{1m}^{(m-1)}x_m &= f_1^{(m-1)}, \\ a_{22}^{(m-2)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(m-2)}x_m &= f_2^{(m-2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Введемо в розгляд матрицю

$$U_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \dots & & & & & \\ & & \cos \varphi & & \sin \varphi & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & & & & 1 & & 0 \\ & & & & & \dots & \\ & & -\sin \varphi & & \cos \varphi & & \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow p \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ p & q \end{matrix}$$

Описаний процес еквівалентний множенню матриць

$$PA = P_{n,n-1} \dots P_{1,2} A = R,$$

де R – трикутна матриця. Отже, розв'язок можна отримати за допомогою процедури зворотного ходу: $Rx = P_{n,n-1} \dots P_{1,2} f$.

7. Метод Хаусхолдера (QR-розклад)

Перетворенням Хаусхолдера називається матриця вигляду $E - ww^T$, де w — вектор-стовбець, для якого $ww^T = 2$. Матриця Хаусхолдера є симетричною і ортогональною. Щоб отримати розклад Хаусхолдера зробимо так. Нехай a_1 — перший стовпчик матриці A . Покладемо

$$u^T = (a_{11} - s, a_{21}, \dots, a_{n1}), w = \mu u,$$

де $s = \pm (a_1^T a_1)^{1/2}$, $\gamma = (s^2 - a_{11}s)^{-1}$, $\mu = \gamma^{1/2}$.

$$P_1 = I - ww^T,$$

$$A_1 = P_1 A = \begin{bmatrix} s & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Застосуємо цей алгоритм для квадратної підматриці, розміру $(n-1) \times (n-1)$ тощо.

Продовжуючи таким чином, можна анулювати всі піддіагональні елементи матриці.

Таким чином,

$$P_{n-1} \dots P_1 A = R,$$

де R — верхня трикутна матриця. Розв'язок знаходимо зворотнім ходом знаходимо, як в методі Гівенса.

8. Модифікований метод Грама-Шмідта (QR-розклад)

Метод обчислює QR -розклад матриці $A = QR$, де Q – унітарна, а R – верхня трикутна матриця. Отже, $x = R^{-1}Q^T f$.

for $i = 1$ to n // Обчислити i -ті стовбці матриць Q і R

$$q_i = a_i$$

for $j = 1$ to $i - 1$ // Відняти від a_i компоненту в напрямку q_j

$$r_{ij} = q_j^T q_i$$

$$q_i = q_i - r_{ij} q_j$$

end for

$$r_{ii} = \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}$$

if $r_{ii} = 0$ // a_i лінійно залежить від a_1, \dots, a_{i-1}

stop

end if

$$q_i = q_i / r_{ii}$$

end for

9. Метод Холецкого (LU-розклад)

Якщо A – симетрична позитивно визначена матриця, то існує дійсна невідроджена нижня трикутна матриця L , так що

$$LL^T = A.$$

Якщо $l_{ii} > 0$, то розклад єдиний.

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1;$$

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Розв'язання системи

$$Ax = b$$

зводиться до розв'язання систем з трикутними матрицями

$$Ly = b,$$

$$L^T x = y.$$

D є границею послідовності матриць A_k , а $V = U_0 U_1 U_2 \dots$

Тест

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 5 & 20 & 4 \\ 6 & 4 & 30 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7.14 & 0 & 0 \\ 0 & 19.15 & 0 \\ 0 & 0 & 33.71 \end{pmatrix}$$