Урок 16. Гільбертові простори і компактні оператори

Задача 16.1. Оператор $A \in \mathcal{L}(H,H)$ називається оператором скінченного рангу, якщо його область значень $\operatorname{Im} A$ є скінченновимірною. Доведіть, що оператор скінченного рангу, заданий на гільбертовому просторі H, є компактним.

Доведення. Нехай $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ — ортонормований базис для $\operatorname{Im} A$, а $\{x_n\}$ — послідовність в просторі H, така що $\|x_n\| \le 1$. Тоді для кожного n

$$Ax_n = \sum_{k=1}^{N} (Ax_n, \varphi_k)\varphi_k .$$

Позначимо $a_n^{(k)} = (Ax_n, \varphi_k)$. Тоді для кожного k послідовність $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою, тому що

$$\left|a_n^{(k)}\right| = \left|(Ax_n, \varphi_k)\right| \le \|Ax_n\| \|\varphi_k\| \le \|A\| \|x_n\| \|\varphi_k\| \le \|A\| .$$

Оскільки кожна обмежена числова послідовність містить збіжну підпослідовність, знайдемо підпослідовність $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(1)} = a^{(1)}$. Потім виберемо підпослідовність $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(2)} = a^{(2)}$. Продовжуючи, отримаємо підпослідовність $\left\{x_k^{(N)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(N-1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(N)} = a^{(N)}$ для всіх $1 \le k \le N$.

Покладемо $y = \sum\limits_{k=1}^{N} a^{(k)}\varphi_k$. Тоді

$$\left\|Ax_m^{(m)} - y\right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left|a_m^{(k)} - a^{(k)}\right|^2 \to 0 \text{ при } m \to \infty .$$

Таким чином, послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ містить збіжну підпослідовність, тобто оператор A є компактним. ■

Задача 16.2. Доведіть, що тотожній оператор I в нескінченновимірному гільбертовому просторі H не є компактним.

Доведення. Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в гільбертовому просторі H. Тоді якщо $n \ne m$, то $\|\varphi_n - \varphi_m\| = \sqrt{2}$. Отже, послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, а значить, не збігається. Крім того, ортонормований базис є обмеженою множиною і власним образом при тотожному відображенні. Таким чином, обмежена множина $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ відображається тотожним оператором у послідовність $\{I\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка не є збіжною, тому оператор I не є компактним. ■

Задача 16.3. Доведіть, що оператор $A : l_2 \to l_2$, визначений формулою $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}x_3, \ldots, 2^{-n+1}x_n, \ldots\right)$ є компактним.

Доведення. Покажемо, що оператор A можна записати як границю рівномірно збіжної послідовності операторів скінченного рангу.

Для кожного N визначимо оператор $A_N : l_2 \to l_2$

$$A_N\left(x_1,x_2,x_3,...\right)=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{4}x_3,...,2^{-N+1}x_N,0,0,...\right).$$

Оператор A_N має скінченний ранг і для кожної послідовності $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$

$$\left\|\left(A-A_N\right)x\right\|^2=\left\|\left(0,...0,2^{-N}x_{N+1},2^{-N-1}x_{N+2},...\right)\right\|^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-2n+2}x_n^2\le 2^{-2N}\sum_{n=N+1}^{\infty}x_n^2\le 2^{-2N}\|x\|^2.$$

Отже,

$$\|A-A_N\|\le 2^{-2N},$$

тому

$$\lim_{N\to\infty}\|A-A_N\|=0. \blacksquare$$

Задача 16.4. Якщо A — лінійний компактний оператор, оператор B — лінійний обмежений, то оператори AB і BA є компактними.

Доведення. Якщо множина $M\subset E$ є обмеженою, то BM — обмежена множина, оскільки обмежений оператор переводить будь-яку обмежену множину в обмежену множину. Отже, множина ABM є відносно компактною. Це означає, що оператор AB є компактним. Аналогічно, якщо множина $M\subset E$ є обмеженою, то AM — відносно компактна множина, оскільки компактний оператор переводить будь-яку обмежену множину у відносно компактну множину. Оператор B — неперервний, тому множина BAM є відносно компактною. Це означає, що оператор BA є компактним. $\blacksquare$

Задача 16.5. Нехай P — ортогональний проектор на замкнений підпростір M гільбертового простору H. Доведіть, що 1) $P^2=P$; 2) $I-P$ є ортогональним проектором на $M^{\perp}$, 3) P — обмежене лінійне відображення на H, таке що $\|Px\|\le\|x\|$ і $\|P\|=1$.

Доведення. В гільбертовому просторі H будь-який елемент $x\in H$ можна записати як суму $x=u+v$, де $u\in M$ і $v\in M^{\perp}$. Ортогональний проектор визначається формулою $Px=u$.

1) $P^2x=Pu=u=Px$

2) $v=x-u=x-Px=\left(I-P\right)x\Rightarrow I-P$ є ортогональним проектором на $M^{\perp}$.

3) $u\perp v\Rightarrow\|x\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2\Rightarrow\|Px\|^2=\|u\|^2\le\|x\|^2\Rightarrow\|P\|\le 1$.

$Px=x\ \ \forall x\in M\Rightarrow\|Px\|=\|x\|$ для $\|x\|\ne 0\Rightarrow\|P\|=1$. $\blacksquare$