Урок 15. Евклідови простори

Задача 15.1. Доведіть, що в евклідовому просторі для довільних елементів a, b, c виконується *тотожність Аполонія*

$$\|c-a\|^2+\|c-b\|^2=\frac{1}{2}\|a-b\|^2+2\left\|c-\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Доведення.

Скористаємося рівністю паралелограма

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Покладемо

$$x=c-a,\ \ y=c-b$$

Тоді

$$2\left(\|c-a\|^2+\|c-b\|^2\right)=\|c-a+c-b\|^2+\|c-b-c+a\|^2=$$

$$=\|2c-a-b\|^2+\|a-b\|^2.$$

Отже,

$$\|c-a\|^2+\|c-b\|^2=\frac{1}{2}\|a-b\|^2+2\left\|c-\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Задача 15.2. Доведіть, що в евклідовому просторі для довільних елементів x, y, z, t виконується *нерівність Птолемея*.

$$\|x-z\|\|y-t\|\le\|x-y\|\|z-t\|+\|y-z\|\|x-t\|.$$

Доведення.

Спроектуємо нерівність на площину *S*, яка є паралельною векторам $x-z$ і $y-t$.

У цьому випадку нерівність Птолемея буде еквівалентною нерівності щодо комплексних чисел в площині *S*.

$$|(x-z)(y-t)|\le|(x-y)(z-t)|+|(x-t)(y-z)|.$$

Покладемо $a=(x-y)(z-t)$ і $b=(x-t)(y-z)$.

Оскільки

$$a+b=(x-y)(z-t)+(x-t)(y-z)=$$

$$=xz-xt-yz+yt+xy-xz-yt+zt=$$

$$=x(y-t)-z(y-t)=$$

$$=(x-z)(y-t).$$

За нерівністю трикутника

$$|a+b|\le|a|+|b|.$$

Отже, виконуєься нерівність

$$|(x-z)(y-t)|\le|(x-y)(z-t)|+|(x-t)(y-z)|.$$

Задача 15.3. Доведіть, що простір *C*(0,1) не є евклідовим.

Перший спосіб. Простір $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ з нормою $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,\pi/2]}|x(t)|$ не є передгільбертовим — в ньому не виконується основна характеристична властивість. Нехай $x(t)=\sin t$ і $y(t)=\cos t$. Оскільки $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x+y\|=\sqrt{2}$, $\|x-y\|=1$, то

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=1+2\neq 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=2(1+1)=4.$$

Для того щоб довести, що простір $C(0,1)$ є неевклідовим, застосуємо лінійне перетворення

$$x(t)=\sin\frac{\pi t}{2},\ y(t)=\cos\frac{\pi t}{2}.$$

Другий спосіб.

Покладемо

$$x(t)=\frac{1}{2},\ y(t)=\frac{1}{2}t.$$

Тоді

$$\|x\|=\frac{1}{2},\ \|y\|=\frac{1}{2},\ \|x+y\|=1,\ \|x-y\|=\frac{1}{2}.$$

Легко бачити, що рівність паралелограма не виконується.

Задача 15.4. Доведіть, що простір l_p $(p>1, p\neq 2)$ не є евклідовим.

Доведення. Норма в просторі l_p задається формулою

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нехай $x=(1,1,0,...,0,0,...)$, $y=(1,-1,0,...,0,0,...)$. Тоді $\|x\|=2^{\frac{1}{p}}$, $\|y\|=2^{\frac{1}{p}}$, $p\neq 2$, $\|x+y\|=2$, $\|x-y\|=2$. Підставимо отримане в рівність при

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4+4=8\neq 2\left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}\right)=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

Задача 15.5. Доведіть, що простір c_0 не є евклідовим.

Доведення. Норма в просторі збіжних до нуля послідовностей задається так:

$$\|x\|=\max_n|x_n|.$$

Нехай $x=(1,1,0,...,0,0,...)$, $y=(1,-1,0,...,0,0,...)$. Тоді

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x+y\|=2,\ \|x-y\|=2$$

Отже,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4+4=8\neq 2(1+1)=4.$$

Задача 15.6. Доведіть, що простір m не є евклідовим.

Норма в просторі обмежених послідовностей задається так:

$$\|x\|=\sup_n|x_n|.$$

Нехай $x=(1,1,0,...,0,0,...)$, $y=(1,-1,0,...,0,0,...)$. Тоді

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x+y\|=2,\ \|x-y\|=2$$

Отже, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4+4=8\neq 2(1+1)=4$.