Урок 13. Спряжені оператори

В задачах про спряжені оператори використовуються факти про загальний вигляд функціонала в певних просторах.

Задача 13.1. Нехай $1 < p < \infty$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді для будь-якої функції $\varphi \in L_p[a,b]$ визначений лінійний неперервний функціонал f, заданий на $L_p[a,b]$, який можна подати у вигляді

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, dt, \tag{13.1}$$

і

$$\| f \| = \| \varphi \|_{L_q[a,b]}.$$

І навпаки, для кожного функціонала $f \in L_p^*$ існує функція $\varphi \in L_p[a,b]$, для якої виконується рівність (13.1), тобто між просторами L_p^* і L_q існує ізометрія, а значить, L_q є спряженим простором до L_p (Без доведення.)

Задача 13.2. Нехай f — лінійний неперервний функціонал, заданий на l_p, $1 \le p < \infty$. Тоді для довільної послідовності $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_q$ співвідношення

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \tag{13.2}$$

визначає лінійний неперервний функціонал на l_p і

$$\| f \| = \| a \|_{l_q},$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. І навпаки, для кожного $f \in l_p^*$ існує послідовність $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_q$, для якої виконується рівність (13.2), тобто між просторами l_p^* і l_q існує ізометрія, а значить, l_q є спряженим простором до l_p.

Доведення. Нехай $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_q$, а функціонал f задається співвідношенням

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

З нерівності Гьольдера випливає, що

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right| \le \|a\|_{l_q} \|x\|_{l_p}, \text{ де } x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_p.$$

Отже,

$$\| f \| \le \| a \|_{l_q}.$$

Оскільки функціонал f є лінійним, достатньо довести протилежну нерівність

$$\| f \| \ge \| a \|_{l_q}.$$

Для кожного $m \in Ґ$ визначимо послідовність

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_n |a_k|^{q-1}, & \textit{якщо } n \le m, \\ 0, & \textit{якщо } n > m. \end{cases}$$

Внаслідок рівності $p(q-1) = q$, маємо

$$\left\| x^{(m)} \right\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n^{(m)} \right|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{m} \left| a_n \right|^q \right)^{1/p}$$

і

$$f\left(x^{(m)}\right) = \sum_{n=1}^{m} \operatorname{sgn} a_n \left|a_n\right|^{q-1} a_n = \sum_{n=1}^{m} \left|a_n\right|^q .$$

За означенням норми функціонала

$$\left| f\left(x^{(m)}\right) \right| \le \| f \|_{l_p^*} \left\| x^{(m)} \right\|_{l_p} ,$$

маємо

$$\sum_{n=1}^{m} \left|a_n\right|^q \le \| f \|_{l_p^*} \left(\sum_{n=1}^{m} \left|a_n\right|^q \right)^{1/p} .$$

Звідси випливає, що

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \left|a_n\right|^q \right)^{1/q} \le \| f \|_{l_p^*} .$$

Переходячи до границі при $m \to \infty$, маємо, що $a \in l_q$.

Для того щоб довести ізометрію між просторами l_q і l_q^*, покажемо,що кожний функціонал $f \in l_p^*$ можна подати у вигляді

$$f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i .$$

Виберемо послідовності $e_n = \left(0, 0, \ldots 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots \right)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Покажемо, що якщо $x = \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \in l_p$, то

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n .$$

Дійсно, якщо

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} x_n e_n ,$$

то

$$\left\| x^{(m)} - S_m \right\|_{l_p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n \right|^p .$$

Оскільки $x \in l_p$, то $\sum_{n=m+1}^{\infty} \left| x_n \right|^p \to 0$ при $m \to \infty$. Отже, $S_m \to x$ при $m \to \infty$. Таким чином,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n .$$

Оскільки f — лінійний неперервний функціонал, маємо

$$f\left(S_m\right) \to f\left(x\right) \text{ при } m \to \infty$$

і

$$f\left(S_m\right) = \sum_{n=1}^{m} a_n x_n .$$

Отже,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i$$

і ізометрію установлено. ■

Задача 13.3. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, задається формулою

$$Ax(t)=\int_0^t x(s)\,ds.$$

Доведення. За теоремою 13.1. будь-який функціонал g, заданий на $L_2[0,1]$, можна записати у вигляді

$$g(x)=\int_0^1 g(s)x(s)ds\,.$$

Тоді

$$g(Ax)=\int_0^1 g(s)\left(\int_0^s x(\tau)d\tau\right)ds\,.$$

Поміняємо порядок інтегрування:

$$g(Ax)=\int_0^1\left(\int_\tau^1 g(s)\,ds\right)x(\tau)\,d\tau\,.$$

Оскільки

$$f(x)=\int_0^1 f(\tau)x(\tau)\,d\tau\,,$$

і

$$f(x)=g(Ax),$$

маємо

$$f(t)=\int_0^1 g(s)\,ds\,,$$

З іншого боку,

$$f=A^*g$$

Таким чином,

$$A^*y(t)=\int_t^1 y(\tau)\,d\tau\,. \blacksquare$$

Задача 13.4. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, що задається формулою

$$Ax(t)=\int_0^1 \sin\left(t^2 s\right)x(s)\,ds.$$

Доведення. Із задачі 13.1 випливає, що лінійний неперервний функціонал у просторі $L_2[0,1]$ можна подати у вигляді

$$g(Ax)=(y,Ax)=\int_0^1 Ax(t)\,y(t)\,dt=\int_0^1\left(\int_0^1 \sin\left(t^2 s\right)x(s)\,ds\right)y(t)\,dt\,,$$

де $\|g\|=\|y\|_{L_2[a,b]}$.

Поміняємо порядок інтегрування.

$$(y, Ax) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(t^2 s) y(t)\,dt \right) x(s)\,ds = (x, A^* y)$$

Отже,

$$A^* y(s) = \int_0^1 \sin(t^2 s) y(t)\,dt\,.$$

Оператор A^* діє з $L_2[0,1]$ (це самоспряжений простір) в $L_2[0,1]$ і є обмеженим. ■

Задача 13.5. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A : l_1 \to l_1$, задається формулою

$$Ax = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Доведення. Із задачі 13.2 випливає, що будь-який функціонал $g \in l_1^*$ можна записати у вигляді

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i x_i\,.$$

Тоді

$$g(Ax) = g_1(x_1 - x_2) + g_2(x_1 + x_2) + g_3 x_3 + \ldots = (g_1 + g_2) x_1 + (-g_1 + g_2) x_2 + g_3 x_3 + \ldots$$

Із рівності

$$f(x) = g(Ax)$$

отримуємо

$$f_1 = g_1 + g_2,$$
$$f_2 = -g_1 + g_2,$$
$$f_i = g_i,\ i = 3, 4, \ldots$$

Оскільки

$$f = A^* g\,,$$

оператор $A^* : l_\infty \to l_\infty$ задається формулою

$$A^* y = (y_1 + y_2, -y_1 + y_2, y_3, \ldots)\,. \ ■$$