Урок 12. Обернені оператори

Задача 12.1. Нехай оператор $A: C[0,2] \to C[0,2]$ задається формулою

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

Довести, що A неперервний оператор, а обернений оператор A^{-1} не є неперервним.

Доведення. Доведемо, що A — неперервний оператор. Для цього покажемо, що він є обмеженим.

$$\|Ax\|_{C[0,2]} \le \max_{t\in[0,2]} \int_0^t |x(\tau)|\,d\tau \le 2\|x\|_{C[0,2]}.$$

Отже, $\|A\| \le 2$.

Знайдемо обернений оператор. Область значень оператора A є простором неперервно диференційованих функцій, які в нулі обертаються в нуль. Визначимо на області $\operatorname{Im} A$ оператор

$$A^{-1}y(t) = \frac{dy}{dt}.$$

Дійсно,

$$\frac{d}{dt}Ax(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t x(\tau)\,d\tau = x(t).$$

Для того щоб довести, що оператор A^{-1} не є неперервним, розглянемо послідовність

$$y_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

За означенням оператора A^{-1} послідовність y_n належить його області визначення, до того ж

$$A^{-1}y_n(t) = \cos nt.$$

Оскільки

$$\|y_n\|_{C[0,2]} \le \frac{1}{n},$$

послідовність y_n збігається до функції $y^* = 0$. Отже, якщо б оператор A^{-1} був неперервним, послідовність $A^{-1}y_n$ мала б прямувати до $A^{-1}y^* = 0$. Проте

$$\left\|A^{-1}y_n - A^{-1}y^*\right\|_{C[0,2]} = \|\cos nt\|_{C[0,2]}.$$

і не збігається до нуля. Таким чином, оператор A^{-1} не є неперервним. ■

Задача 12.2. Нехай оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ задається формулою

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds.$$

Довести, що обернений оператор A^{-1} існує і є неперервним.

Доведення. Оператор A визначений на просторі $C[0,1]$ і

$$\|A\| \le 1 + \max_{t\in[0,1]} \int_0^t e^{s+t}\,ds = 1 + (e-1)e.$$

Оскільки простір $C[0,1]$ є банаховим простором, отже за теоремою Банаха про неперервний оператор, тому при кожному $y \in C[0,1]$ рівняння

$$Ax(t) = x(t) + e^t \int_0^1 e^s x(s)\,ds = y(t)$$

має єдиний розв'язок.

Позначимо $c = \int_0^1 e^s x(s)\,ds$, тоді

$$x(t) = y(t) - ce^t.$$

Помножимо цей вираз на e^t і проінтегруємо по відрізку $[0,1]$

$$\int_0^1 e^t x(t)\,dt = \int_0^1 e^t y(t)\,dt - c\frac{e^2-1}{2}.$$

Оскільки $c = \int_0^1 e^t x(t)\,dt$, то

$$c\frac{e^2+1}{2} = \int_0^1 e^t y(t)\,dt.$$

Виразимо значення c, підставимо в рівняння і отримаємо

$$x(t) = y(t) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{t+s} y(s)\,ds \equiv A^{-1}y(t).$$

Значить, $x(t)$ є розв'язком вихідного рівняння і

$$\left\|A^{-1}\right\| \le 1 + \frac{2}{e^2+1} e(e-1). \blacksquare$$

Задача 12.3. Нехай оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ задається формулою

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)\,ds.$$

Довести, що обернений оператор A^{-1} існує і є неперервним.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)\,ds = y(t),$$

де $y \in C[0,1]$.

Позначимо $g(t) = \int_0^t x(s)\,ds$. Зауважимо, що $g(0) = 0$ і g — неперервно диференційована функція, для якої $g'(t) = x(t)$.

Оскільки $x(t) = y(t) - g(t)$, отримуємо диференційне рівняння

$$g'(t) = y(t) - g(t).$$

Розв'яжемо однорідне рівняння $g'(t) + g(t) = 0$. Його розв'язком є функція $g(t) = ce^{-t}$. Використовуючи метод варіації довільної сталої і покладаючи $g(t) = c(t)e^{-t}$, отримуємо

$$c'(t)=e^t y(t).$$

Звідси випливає, що

$$c(t)=\int_0^t e^s y(s)\,ds+\gamma.$$

Оскільки $g(0)=0$, маємо $c(0)=\gamma=0$. Отже,

$$g(t)=\int_0^t e^{s-t} y(s)\,ds$$

і

$$x(t)=A^{-1}y(t)=y(t)-\int_0^t e^{s-t} y(s)\,ds.$$

Оцінимо норму оператора A^{-1}.

$$\left\|A^{-1}y\right\|_{C[0,1]}\le\left(1+\max_{t\in[0,1]}\int_0^t e^{s-t}ds\right)\|y\|_{C[0,1]}=\left(2-e^{-1}\right)\|y\|_{C[0,1]}.$$

Отже,

$$\left\|A^{-1}\right\|\le 2-e^{-1}.\ \blacksquare$$

Задача 12.4. Нехай оператор $A: C[0,1]\to C[0,1]$ задається формулою

$$Ax(t)=x''(t)+x(t),$$

де $D(A)=\left\{x(t)\in C^{(2)}[0,1]: x(0)=0,\ x'(0)=0\right\}$.Довести, що обернений оператор A^{-1} існує і є неперервним.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$x''(t)+x(t)=y(t)$$

з початковими умовами $x(0)=x'(0)=0$ і довільною функцією $y\in C[0,1]$. Знайдемо розв'язок цієї задачі Коші. Для цього розглянемо однорідне рівняння

$$x''(t)+x(t)=0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t)=c_1\sin t+c_2\cos t.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння знайдемо методом варіації довільної сталої:

$$x(t)=c_1(t)\sin t+c_2(t)\cos t.$$

Функції $c_1(t)$ і $c_2(t)$ визначаються із системи

$$\begin{cases} c_1'(t)\sin t+c_2'(t)\cos t=0,\\ c_1'(t)\cos t-c_2'(t)\sin t=y(t). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо $c_1'(t)=y(t)\cos t$, $c_2'(t)=-y(t)\sin t$. Тоді

$$c_1(t)=\int_0^t y(s)\cos s\,ds+\gamma_1,$$

$$c_2(t)=-\int_0^t y(s)\sin s\,ds+\gamma_2.$$

Оскільки $x(0)=c_2(0)=0$, то $\gamma_2=0$. Крім того, $x'(0)=c_1(0)=0$, тому $\gamma_1=0$. Отже,

$$x(t)=\int_0^t \sin(t-s)y(s)\,ds = A^{-1}y(t).$$

Таким чином, рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок для будь-якого елемента $y\in C[0,1]$. Крім того,

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|\sin(t-s)\right| ds \le 1. \blacksquare$$

Задача 12.5. Довести, що оператор $A: l_2 \to l_2$, який задається формулою

$$Ax=(x_1+x_2, x_1-x_2, x_3, x_4, \ldots),$$

має неперервний обернений оператор A^{-1} і обчислити його норму.

Доведення. Оскільки $\|A\|_{l_2} \le \sqrt{2}\|x\|_{l_2}$, то $A\in \mathcal{L}(l_2,l_2)$. Враховуючи те, що l_2 — банаховий простір, то для доведення того, що оператор A має неперервний обернений оператор завдяки теоремі Банаха про обернений оператор достатньо довести, що рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок для довільного елемента $y\in l_2$.

$$Ax=(x_1+x_2, x_1-x_2, x_3, x_4, \ldots)=(y_1, y_2, \ldots)$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} &x_1+x_2=y_1,\\ &x_1-x_2=y_2,\\ &x_i=y_i,\ i=3,4,\ldots. \end{aligned}$$

Отже, рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок

$$x=A^{-1}y=\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}, y_3, y_4, \ldots\right).$$

Обчислимо норму оператора A^{-1}. Із означення норми в просторі l_2 випливає, що

$$\left\|A^{-1}y\right\|_{l_2}^2=\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2+y_3+\ldots \le \frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}+y_3^2+\ldots \le \|y\|_{l_2}^2.$$

Звідси випливає, що

$$\left\|A^{-1}\right\| \le 1.$$

Крім того, якщо взяти $e_3=(0,0,1,0,0,\ldots)$, то $A^{-1}e_3=e_3$ і

$$\left\|A^{-1}\right\| \ge \frac{\left\|A^{-1}e_3\right\|_{l_2}}{\|e_3\|_{l_2}}=1.$$

Отже,

$$\left\|A^{-1}\right\|=1. \blacksquare$$

Задача 12.6. Довести, що оператор $A: l_2 \to l_2$, який задається формулою

$$Ax=\left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right)$$

має неперервний обернений оператор A^{-1} і обчислити його норму.

Доведення. Легко бачити, що оператор A є лінійним і обмеженим, оскільки

$$\|Ax\|_{l_2} \le \|x\|_{l_2}.$$

Його образ — лінійний підпростір простору l_2. Отже, це лінійний нормований простір з нормою із l_2. Доведемо, що від є взаємно однозначним.

Ясно, що оператор A є сюр'єктивним. Крім того, якщо $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots\right) = (0, 0, \dots)$, то $x_1 = x_2 = \dots = 0$.

Покажемо, що обернений оператор є необмеженим. Дійсно, $A^{-1}(y_1, y_2, \dots) = (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots)$. Якщо $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, то $A^{-1}e_n = ne_n$, отже, $\left\|A^{-1}e_n\right\|_{l_2} = n$. Таким чином,

$$\left\|A^{-1}\right\| = \sup_{\|x\|_{l_2} \le 1} \left\|Ax\right\|_{l_2} \ge n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \blacksquare$$