Урок 11. Простори лінійних неперервних функціоналів і операторів

Задача 11.1. Довести неперервність функціонала f, заданого на просторі $C[-2,2]$ за допомогою формули

$$f(x) = x(2) + \int_{-2}^{2} tx(t)\,dt,$$

Розв'язок. Лінійність випливає із властивостей інтеграла. Перевіримо неперервність в точці $x=0$. Для цього виберемо послідовність $x_n \to 0$, тобто $\|x_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Оскільки функціонал f лінійний, то $f(0)=0$ і треба довести, що $f(x_n) \to 0$.

$$\left|f(x_n)\right| \le \left|x_n(2)\right| + \left|\int_{-2}^{2} tx_n(t)\,dt\right| \le \left|x_n(2)\right| + \int_{-2}^{2} |t|\left|x_n(t)\right|dt \le$$

$$\le \max_{t\in[-2,2]}\left|x_n(t)\right| + \max_{t\in[-2,2]}\left|x_n(t)\right|\int_{-2}^{2}|t|\,dt = \|x_n\|_{C[-2,2]} + \|x_n\|_{C[-2,2]}\int_{-2}^{2}|t|\,dt \le$$

$$\le \|x_n\|_{C[-2,2]} + 4\|x_n\|_{C[-2,2]} = 5\|x_n\|_{C[-2,2]} \to 0, n \to \infty.$$

Отже, функціонал f є неперервним. Можна також послатися на те, що функціонал обмежений. ■

Задача 11.2. Довести неперервність функціонала f, заданого на просторі l_3 за допомогою формули

$$f(x) = x_1 - 4x_2.$$

Розв'язок. Лінійність очевидна. Доведемо обмеженість функціонала. Для цього застосуємо нерівність Гьольдера.

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{1/q}, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \ p,q \ge 1.$$

За умовами задачі $p=3,\, q=\frac{3}{2},\, a_1 = x_1,\, a_2 = x_2,\, b_1 = 1,\, b_2 = -4,\, a_i = b_i = 0,\, i \ge 3$.

Отже,

$$\left|f(x)\right| = \left|x_1 - 4x_2\right| \le \left(|1|^{\frac{3}{2}} + |-4|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(|x_1|^3 + |x_2|^3\right) \le 9^{\frac{2}{3}}\|x\|_{l_3}. \ ■$$

Задача 11.3. Обчислити норму функціонала $f(x) = x(1) - 2x(2)$, заданого на просторі $C[0,2]$.

Розв'язок. Доведемо дві протилежні нерівності.

З одного боку,

$$\left|f(x)\right| \le \left|x(1)\right| + 2\left|x(1)\right| \le 3\|x\|_{C[0,2]} \Rightarrow \|f\| \le 3.$$

З іншого боку,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in C[0,2],\\ x\ne 0}} \frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{C[0,2]}} \ge \frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{C[0,2]}} = \frac{\left|x(1) - 2x(2)\right|}{\max_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right|}.$$

Якщо ми знайдемо таку функцію, на якій права частина нерівності дорівнює 3, задача буде розв'язана. Виберемо функцію, таку щоб $\max_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right| = 1$, $x(1) = 1$ і

$x(2)=-1$. Очевидно, що треба взяти функцію, що обмежена смугою $-1\le |x(t)|\le 1$ і проходить через точки $(1,1)$ і $(2,-1)$. ■

Задача 11.4. Обчислити норму функціонала $f(x)=2x_1-3x_3$, заданого на просторі l_4.

Розв'язок. Доведемо дві протилежні нерівності.

Застосувавши нерівність Гьольдера при $p=4, q=\frac{4}{3}$, $a_1=2, a_2=-3$, $b_1=x_1, b_2=x_3$, $a_i=x_i, b_i=0, i=3,\ldots$ отримуємо

$$|f(x)|\le\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\left(|x_1|^4+|x_2|^4\right)\le\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\|x\|_{l_4}.$$

Отже,

$$\|f\|\le\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

З іншого боку, маємо нерівність

$$\|f\|=\sup_{x\in l_4, x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_{l_4}}\ge\frac{|f(x)|}{\|x\|_{l_4}}.$$

Знайдемо послідовність, на якій

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_{l_4}}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Для цього врахуємо, що нерівність Гьольдера обертається на рівність, якщо $b_i=|a_i|^{p-1}\operatorname{sgn}a_i$. Власне, на цьому можна було б закінчити, тому що достатньо показати. що така послідовність існує, отже виконується нерівність

$$\|f\|\ge\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

але з дидактичних міркувань спробуємо все ж таки явно знайти таку послідовність.

Покладемо $p=\frac{4}{3}, q=4, a_1=2, a_3=-3, a_i=0, i\ne 1,3$ і $x_1^*=2^{\frac{1}{3}}$, $x_3^*=-3^{\frac{1}{3}}$, $x_i^*=0, i\ne 1,3$. Тоді $f(x^*)=2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}$ і $\|x^*\|_{l_4}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$. Отже,

$$\|f\|\ge\frac{|f(x)|}{\|x\|_{l_4}}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Таким чином,

$$\|x\|_{l_4}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.\ ■$$

Задача 11.5. Обчислити норму функціонала $f(x)=\int_{-1}^{1} tx(t)\,dt$, заданого на просторі $L_3[-1,1]$.

Розв'язок. Використаємо інтегральну нерівність Гьольдера.

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

Покладемо $p=\frac{3}{2},\ q=3,\ f(t)=t,\ g(t)=x(t)$.

$$|f(x)| \le \left(\int_{-1}^{1} |t|^{\frac{3}{2}} dt\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^3 dt\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Перший інтеграл дорівнює $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$. Отже,

$$\|f\| \le \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Нерівність Гьольдера перетворюється на рівність, якщо

$$x(t)=|y(t)|^{p-1}\operatorname{sgn} y(t).$$

Отже, виберемо функцію

$$x^*(t)=|t|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn} t.$$

Тоді

$$f(x^*)=\int_{-1}^{1}|t|^{\frac{3}{2}}dt=\frac{4}{5},$$

$$\|x^*\|_{L_3[-1,1]}=\left(\int_{-1}^{1}|t|^{\frac{3}{2}}dt\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Оскільки,

$$\|f\| \ge \frac{|f(x^*)|}{\|x^*\|}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Отже,

$$\|f\|=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.\ \blacksquare$$

Задача 11.6. Обчислити норму функціонала $f(x)=\int_{-1}^{1} tx(t)\,dt$, заданого на просторі $C[-1,1]$.

Розв'язок. З одного боку,

$$\|f\| \le \|x\|_{C[-1,1]} \text{ (див. задачу 11.1).}$$

Тоді $\|f\| \ge 1$. Для доведення протилежної оцінки треба підібрати неперервну функцію x^*, так щоб

$$\frac{\left|f\left(x^*\right)\right|}{\left\|x^*\right\|_{C[-1,1]}}=1.$$

Серед неперервний функцій такої функції не існує, але можна взяти обмежену розривну функцію $x^*(t)=\operatorname{sgn}(t)$ в просторі обмежених функцій $M[-1,1]$. Тоді

$$\frac{\left|f\left(x^*\right)\right|}{\left\|x^*\right\|_{M[-1,1]}}=1$$

Для того щоб розв’язати задачу, знайдемо послідовність неперервних функцій $x_n(t)\to x^*(t)\ \ \forall t\in[-1,1]$. Цю послідовність можна задати формулою

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & \textit{якщо } \frac{1}{n}\le t\le 1,\\ nt, & \textit{якщо } -\frac{1}{n}\le t\le \frac{1}{n},\\ -1, & \textit{якщо } -1\le t\le -\frac{1}{n}\textit{ю}\end{cases}$$

$$f\left(x_n\right)=2\left(\int_0^{1/n} nt^2dt+\int_{1/n}^{1} tdt\right)=1-\frac{1}{3n^2}.$$

$$\left\|x_n\right\|_{C[-1,1]}=1\Rightarrow\|f\|\ge\frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{\left\|x_n\right\|_{C[-1,1]}}=1-\frac{1}{3n^2}\to 1,\ n\to\infty\Rightarrow\|f\|\ge 1.$$

Отже,

$$\|f\|=1.\ \blacksquare$$

Задача 11.7. Обчислити норму функціонала $f(x)=3x_1-4x_2$, заданого на просторі l_∞^2 з нормою $\|x\|_{l_\infty^2}=\max\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right)$.

Розв’язок. Застосуємо геометричну інтерпретацію функціонала:

$$\|f\|=\frac{1}{\inf\limits_{x\in L_f}\|x\|},\ \ L_f=\left\{x\in L: f(x)=1\right\}.$$

Значить, щоб знайти норму функціонала, треба побудувати гіперплощину L_f і знайти відстань d від нуля до цієї гіперплощини. Тоді $\|f\|=\frac{1}{d}$.

Побудуємо на площині пряму $3x_1-4x_2=1$ (гіперплощина L_f). для того щоб знайти відстань від нуля до цієї прямої, треба побудувати кулю з центром в нулі радіуса r, таку щоб вона торкалася прямої. Кулею $S(0,r)$ в просторі l_∞^2 є квадрат із стороною $2r$. Точкою дотику є точка $(r,-r)$. Отже,

$$3r+4r=1\Rightarrow d=\frac{1}{7}\Rightarrow\|f\|=7.\ \blacksquare$$

Задача 11.8. Чи є функціонал $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin^2 tdt$ в просторі $L_2[0,1]$?

Розв’язок. Перевіримо лінійність функціонала.

$$\forall\alpha_1,\alpha_2 \in R,\ \ x_1,x_2 \in L_2[0,1]$$

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\int_0^1(\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t))\sin^2 tdt=$$

$$=\alpha_1\int_0^1 x_1(t)\sin^2 tdt+\alpha_2\int_0^1 x_2(t)\sin^2 tdt=\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Отже, функціонал є лінійним в просторі $L_2[0,1]$. Тепер перевіримо його обмеженість. За нерівністю Коші–Буняковського $|(x,y)|\le\|x\|\|y\|=\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$. Отже,

$$\left|(x,\sin^2 t)\right|=\left|\int_0^1 x(t)\sin^2 tdt\right|\le\sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt}\sqrt{\int_0^1\sin^4 tdt}\le\|x\|.$$

Оскільки $\|f\|=\inf\limits_{C>0}\{C:|f|\le C\|x\|\ \ \forall x\in E\}$, звідси випливає, що $\|f\|\le 1$. Для того щоб лінійний неперервний функціонал був неперервним, необхідно і достатньо. щоб він був обмеженим. Отже, функціонал $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin^2 tdt$ є неперервним. ■

Задача 11.9. Обчисліть норму оператора $A:R^n\to l_2$, де

$$A(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\frac{\xi_1}{2},\frac{\xi_2}{2},...,\frac{\xi_n}{2},...,\frac{\xi_1}{k},\frac{\xi_2}{k},...,\frac{\xi_n}{k},...\right),\ x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n).$$

Розв'язок. Обчислимо норму $\|Ax\|_{l_2}$.

$$\|Ax\|_{l_2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)}=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)}=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}\|x\|_{R^n}\Rightarrow\|A\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}.\ ■$$

Задача 11.10. Нехай m — простір обмежених числових послідовностей, а оператор A: $m\to m$ задано рівностями

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,...,$$

де a_{ij} — елементи нескінченновимірної матриці, що задовольняє умову

$$\gamma=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<+\infty.$$

Обчисліть норму оператора A.

Розв'язок. Із рівності $y_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,...$ випливає, що

$$\forall i\ \ |y_i|=\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\|x\|_m\le\gamma\|x\|_m,\quad i=1,2,...$$

Отже,

$$\|Ax\|_m\le\gamma\|x\|_m,\text{ тобто }\|A\|\le\gamma.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати. що супремум досягається при $i=1$. Тоді для вектора x з координатами $x_j=\operatorname{sgn}a_{ij}$ виконується рівність

$$\|y\|_m = y_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Таким чином,

$$\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \ ■$$

Задача 11.11. Дослідіть рівномірну і поточкову збіжність послідовності операторів $\{A_n\} \subset L(E,E)$, де $A_n x(t) = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)\,d\tau$, $t \in [0,1]$, $E = C[0,1]$.

Розв'язок. Нехай $F(t)$ — первісна функції $x(t)$. Тоді при $n \to \infty$

$$A_n x = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)\,d\tau = n\left(F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F(t)\right) = \frac{F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F(t)}{\frac{1}{n}} \to F'(t) = x(t).$$

Таким чином, послідовність $\{A_n\} \subset L(E,E)$ поточково збігається до тотожного оператора *I*. Покажемо тепер, що ця послідовність не збігається рівномірно до цього оператора. Розглянемо функції $x_n(t) = t^{n-1}$, $n \ge 2$.

$$\|x_n\| = \max_{t\in[0,1]} \left|t^{n-1}\right| = 1.$$

Оцінимо наступну норму.

$$\|A_n x_n - x_n\| = \max_{t\in[0,1]} \left| n \int_t^{t+\frac{1}{n}} \tau^{n-1} d\tau - t^{n-1} \right| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \left| \left\| \tau^{n-1} \right\|_{\tau=t}^{\tau=t+\frac{1}{n}} - t^{n-1} \right| = \max_{t\in[0,1]} \left| \left(t+\frac{1}{n}\right)^n - t^n - t^{n-1} \right| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \left| t^n + t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2n^2} t^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n^n} - t^n - t^{n-1} \right| \ge$$

$$\ge \frac{n(n-1)}{2n^2} \max_{t\in[0,1]} t^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \ge \frac{1}{4}, \ n \ge 2.$$

Отже,

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax - x\| \ge \|Ax_n - x_n\| \ge \frac{1}{4} \ \text{при} \ n \to \infty.$$

Таким чином, послідовність не збігається рівномірно до тотожного оператора. ■

Задача 11.12. Дослідіть рівномірну і поточкову збіжність послідовності операторів $\{A_n\} \subset L(E,E)$, де $A_n x(t) = t^n x(t)$, $t \in [0,1]$, $E = C[0,1]$.

Розв'язок. При $n \to \infty$

$$t^n x(t) \to \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ 0 \le t \le 1, \\ x(1), \ \textit{якщо} \ t = 1. \end{cases}$$

Отже, послідовність $\{A_n\}$ не збігається поточково до жодного неперервного оператора. З цього випливає, що вона не збігається і рівномірно. ■