Урок 10. Сепарабельні і несепарабельні метричні простори

Щоб довести, що простір є сепарабельним достатньо указати його зліченну скрізь щільну підмножину. Щоб довести, що простір не є сепарабельним достатньо показати, що якби в ньому існувала скрізь щільна підмножина, вона не могла б бути зліченною. Для цього необхідно побудувати сімейство куль, центри яких утворюють незліченну множину (континуум), потім вибрати радіуси цих куль, так щоб вони не перетиналися. Оскільки гіпотетична множина є скрізь щільною, в кожній з цих куль повинна була б містись хоча б одна точка цієї множини. Інакше кажучи, потужність цієї множини збігається з потужність множини куль — континуум. Це суперечить припущенню, що вона є зліченною.

Задача 10.1. Доведіть, що простір $\left(s, \sup\limits_n \frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}\right)$ не є сепарабельним.

Розв'язок. Припустимо, що простір $\left(s, \sup\limits_n \frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}\right)$ є сепарабельним, тобто містить скрізь щільну зліченну множину M. Розглянемо множину усіх послідовностей, що складаються лише з нулів і одиниць $E_{0,1}$. З одного боку, $E_{0,1} \subset s$. З іншого боку, кожну послідовність, що складається з нулів і одиниць, можна вважати бінарним розкладом дробової частини дійсного числа із $[0,1]$, тобто $card\ E_{0,1} = c$.

$$x \in E_{0,1},\ y \in E_{0,1},\ x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) = \frac{1}{2} \Rightarrow S(x,r) \cap S(y,r) = \varnothing,\ r < \frac{1}{4}.$$

Отже, в кожну кулю $S(x,r),\ x \in E_{0,1},\ r < \frac{1}{4}$ повинна потрапити хоча б одна точка із M. Отже, $card\ M = card\ E_{0,1} = c$. Ця суперечність означає, що простір $\left(s, \sup\limits_n \frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}\right)$ є несепарабельним. ■

Задача 10.2. Доведіть, що простір $\left(s, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\right)$ є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай $M = (r_1, r_2, ..., r_n, 0, ...),\ r_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що множина M є зліченою: $card\ M = \aleph_0$. Доведемо, що вона є скрізь щільною в просторі $\left(s, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\right)$. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\xi_k}{1+\xi_k}$ є збіжним, то

$$\forall x \in s, \varepsilon > 0\ \exists n > 0: \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\xi_k}{1+\xi_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З іншого боку,

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)\ \exists x_0 = (r_1, r_2, ..., r_n, 0, ...): \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\rho(x,x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\le\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-r_k|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{M}=s$. ■

Задача 10.3. Доведіть, що простір l_p, $p\ge 1$ є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай $x\in l_p$, $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$, $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,...)$. Тоді

$$\rho(x,x_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\rho(x,x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p=0.$$

Розглянемо послідовності $x_n'=(r_1,r_2,...,r_n,0,...)$, де $r_n\in\mathbb{Q}$. Позначимо множину таких послідовностей як D_n.

$$\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R} \Rightarrow \forall\xi_i\in\mathbb{R}\ \exists r_i\in\mathbb{Q}\ \ |\xi_i-r_i|<\frac{1}{n^{\frac{p+1}{p}}},\ i=1,2,...,n.$$

Покажемо, що в довільному околі точки $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,...)$ можна знайти точку $x_n'=(r_1,r_2,...,r_n,0,...)$.

$$\rho(x_n',x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}|r_i-\xi_i|^p\right)^{1/p}<\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^{p+1}}\right)^{1/p}=\left(\frac{1}{n^p}\right)^{1/p}=\frac{1}{n}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n',x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x_n',x)\le\rho(x_n',x_n)+\rho(x_n,x)<\frac{1}{n}+\rho(x_n,x)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отже, $x_n'\to x$ при $n\to\infty$, значить, $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n}=l_p$.

$$card\ D_n=\aleph_0 \Rightarrow card\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\aleph_0 \Rightarrow l_p \text{ — сепарабельний простір.}$$ ■

Задача 10.4. Доведіть, що простір $L_\infty(0,1)$, де $\rho(x,y)=\sup_{t\in(0,1)}|x(t)-y(t)|$ не є сепарабельним.

Розв'язок. Припустимо, що $L_\infty(0,1)$ є сепарабельним, тобто містить зліченну скрізь щільну множину A. Розглянемо множину $M_0\subset l_\infty(0,1)$ всіх характеристичних функцій, тобто функцій, що набувають лише два значення — нуль і одиниця.

$$x_t(u)=\begin{cases}0, \text{ якщо } 0<u\le t,\\ 1, \text{ якщо } u>t.\end{cases}$$

Кількість функцій $x_t(u)$ співпадає з кількістю точок в інтервалі $(0,1)$, тобто $card\, M_0 = c$. Неважко перевірити, що $t \neq s \Rightarrow \rho(x_t, x_s) = 1$. Отже, якщо побудувати кулі з центрами в точках x_t і радіусами $r < \frac{1}{2}$, то $\forall x_t \neq x_s\ S(x_t, r) \cap S(x_s, r) = \varnothing$. Значить, в кожну кулю $S(x_t, r)$ повинна потрапити б хоча одна точка із A, тобто $card\, A = card\, M_0 = c$. Це суперечить припущенню, що множина A є зліченною. ■

Задача 10.5. *Для того щоб метричний простір (X,ρ) був сепарабельним, необхідно і достатньо, щоб він мав злічену базу (тобто задовольняв другу аксіому зліченності).*

Розв'язок. Необхідність. Нехай (X,ρ)— сепарабельний простір і $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$— злічена всюди щільна підмножина носія X. Тоді кулі $S(a_n, r_m)$, де $n, m \in N$, $r_m \in Q$ утворюють злічену базу простору (X,ρ).

Дійсно, нехай x_0 — довільна точка із множини X, а G — довільна відкрита множина, що містить точку x_0. За означенням відкритої множини існує $\varepsilon > 0$ таке, що $S(x_0, \varepsilon) \subset G$. Оскільки A — всюди щільна множина, то для кожного $r_0 > 0$ в кулі $S(x_0, r_0)$ знайдеться точка $a_{n_0} \in A$. Виберемо $r_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді куля $S\left(a_{n_0}, r_0\right)$ буде містити точку x_0 і одночасно цілком міститись всередині кулі $S(x_0, \varepsilon)$:

$$\rho(x_0, x) \leq \rho\left(x_0, a_{n_0}\right) + \rho\left(a_{n_0}, x\right) < r_0 + r_0 < \varepsilon.$$

Отже, для довільної відкритої множини G в системі множин $\{S(a_n, r_m)\}_{n,m\in N}$ знайшлася куля $S\left(a_{n_0}, r_0\right)$, що містить точку x_0 і належить множині G. Це означає, що $\{S(a_n, r_m)\}_{n,m\in N}$— база.

Достатність. Нехай в просторі (X,ρ) є злічена база $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Вибравши з кожної множини β_n по точці $a_n \in \beta_n$, ми отримаємо множину $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Доведемо, що ця множина є всюди щільною. Дійсно, припустимо супротивне. Нехай $\overline{A} \neq X$, то відкрита множина $G = X \setminus \overline{A}$ була б непорожньою і не містила б жодної точки із множини $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Але це неможливо, оскільки G— відкрита множина, і значить, вона є об'єднанням деяких множин із бази $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, які містять точки a_n.
■

Задача 10.6. *Наведіть приклад топологічного простору, в якому властивість сепарабельності не є спадковою.*

Розв'язок. Розглянемо топологічний простір

$$X=(a,b),\tau=\left\{\varnothing,X,\mathbb{R}_{(a,b)}=\{x\}\cup(a,b)\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\right\}$$

топологія якого утворена об’єднаннями одноточкових множин, що містять дійсні числа із інтервалу (a,b), та множиною раціональних чисел із цього інтервалу. Побудуємо підпростір із індукованою топологією.

$$M=\mathbb{R}_{(a,b)}\setminus\mathbb{Q},\ \tau_M=\left\{\tau_\alpha\cap M=\{x\},\ \tau_\alpha\in\tau,\ x\in(a,b)\setminus\mathbb{Q}\right\}.$$

Підпростір (M,τ_M) складається із ізольованих точок, тобто є дискретним. Він не є сепарабельним, оскільки його топологія є незліченою множиною одноелементних множин і не може мати всюди щільну злічену множину. ■

Для метричних просторів ситуація є більш простою.

Задача 10.7. *Довільна підмножина X_0 сепарабельного метричного простору X сама є сепарабельним простором, тобто сепарабельність є спадковою властивістю.*

Розв’язок. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$— злічена всюди щільна в *X* множина його точок. Візьмемо два натуральних числа *n* і *k*. Якщо існують кілька точок $x\in X_0\subset X$, для яких

$$\rho(x,x_n)<\frac{1}{k},$$

виберемо хоча б одну із них і позначимо як $x_n^{(k)}$ (внаслідок щільності існує хоча б одна така точка). Позначимо множину таких точок через $A=\left\{x_{n_k}\right\}$.Ця множина є скінченною або зліченною.

Покажемо, що $\overline{A}=X_0$. Нехай $x\in X_0$. Візьмемо $\varepsilon>0$ і підберемо натуральне число k, так щоб $\frac{1}{k}\le\frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $\overline{\{x_n\}_{k=1}^{\infty}}=X$, то існує число n_0, таке що $\rho\left(x_{n_0},x\right)<\frac{1}{k}$. Отже, існує $x_{n_0}^{(k)}\in A$, така що $\rho\left(x_{n_0}^{(k)},x_{n_0}\right)<\frac{1}{k}$. Таким чином,

$$\rho\left(x_{n_0}^{(k)},x\right)\le\rho\left(x_{n_0}^{(k)},x_{n_0}\right)+\rho\left(x_{n_0},x\right)<\frac{2}{k}\le\varepsilon.$$

Оскільки число ε є довільним, множина *A* є всюди щільною в X_0. Отже, простір X_0 є сепарабельним. ■