Урок 9. Компактність в метричних просторах

Задача 9.1. Компактна підмножина метричного простору є обмеженою.

Розв'язок. Розглянемо множину A в метричному просторі (X,ρ). Припустимо, що множина A не є обмеженою. Візьмемо її довільну точку і позначимо її як x_1. Побудуємо кулю $S(x_1,r_1)$, поклавши $r_1=1$. Оскільки множина не є обмеженою, існує хоча б одна точка множини A, що лежить за межами кулі $S(x_1,r_1)$. Позначимо її як x_2. Тоді має місце наступне твердження.

$$x_2 \notin S(x_1,r_1) \Rightarrow \rho(x_1,x_2) \ge r_1.$$

Побудуємо кулю $S(x_1,r_2)$, поклавши $r_2=\rho(x_1,x_2)+1$. Оскільки множина не є обмеженою, існує хоча б одна точка множини A, що лежить за межами кулі $S(x_2,r_2)$. Позначимо її як x_3. Тоді має місце наступне твердження.

$$x_3 \notin S(x_1,r_2) \Rightarrow \rho(x_1,x_3) \ge r_2.$$

Продовжуючи цей процес до нескінченості, отримаємо послідовність точок $x_n \in A$ і числову послідовність $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, що зростає. До того ж для всіх n = 2, 3, ...

$$\rho(x_1,x_n)=r_n-1\ge r_{n-1}.$$

Отже, для всіх $n>m\ge 2$

$$\rho(x_1,x_n)=r_n-1\ge r_{n-1}\ge r_m;\ \rho(x_1,x_m)=r_m-1.$$

Застосуємо нерівність трикутника

$$\rho(x_1,x_n)\le\rho(x_1,x_m)+\rho(x_m,x_n).$$

Звідси випливає, що

$$r_m\le(r_m-1)+\rho(x_m,x_n).$$

Таким чином,

$$\rho(x_m,x_n)\ge 1.$$

Таким чином, жодна часткова підпослідовність, що виділена із $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, отже, не є збіжною. З цього випливає, що множина A не є компактною. Застосовуючи закон заперечення, отримуємо бажане. ■

Задача 9.2. Покажіть, що обмежена множина в метричному просторі не обов'язково є компактною.

Розв'язок. Наведемо контрприклад. Розглянемо метричний простір $\left(l_2,\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}\right)$. Розглянемо множину координатних ортів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, де $e_n=\left\{e_n^{(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$, $e_n^{(i)}=\begin{cases}1,\ якщо\ i=n,\\ 0,\ якщо\ i\ne n.\end{cases}$ Відстань будь-якого орта від нуля дорівнює 1, оскільки

$$\rho\left(e_n,0\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(e_n^{(i)}-0\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(e_n^{(i)}\right)^2}=\sqrt{0+\ldots+0+1+0+\ldots}=1.$$

Отже, множина ортів лежить в кулі з центром в нулі і радіусом, до дорівнює одиниці, тобто вона є обмеженою множиною. З іншого боку, якщо $m\neq n$

$$\rho\left(e_m,e_n\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(e_m^{(i)}-e_n^{(i)}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(0-0)^2+\ldots+\underbrace{(1-0)^2}_{m-те\ місце}+\ldots\underbrace{(0-1)^2}_{n-те\ місце}+\ldots(0-0)^2}=\sqrt{2}.$$

Таким чином, послідовність $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною. З цього випливає, що жодна підпослідовність цієї послідовності не є фундаментальною, а, значить, не є збіжною. Отже, із послідовності $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ не можна виділити жодну збіжну підпослідовність. Це значить, що множина $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ хоча і є обмеженою, але не є компактною. ■

Задача 9.3. Нехай $\mathbb{Q}$ — метричний простір всіх раціональних чисел з метрикою $\rho\left(p,q\right)=\left|p-q\right|$. Доведіть, що множина $M=\left\{p\in\mathbb{Q}:0\leq p\leq 1\right\}$ є цілком обмеженою, але не є компактною.

Розв'язок. Ця задача ілюструє важливість умови повноти метричного простору в критерії компактності, адже простір $\mathbb{Q}$ не є повним. Отже, критерії Хаусдорфа порушується, тобто множина M компактною.

Приклад: 0, 0.4, 0.41, 0.414, 0.4142, ... $\to\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. ■

Зауваження. В множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ поняття цілком обмеженої множини еквівалентне поняттям обмеженої множини. Оскільки $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, це стосується і простору $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо множина дійсних чисел A є цілком обмеженою, то для довільного $\varepsilon>0$ існує скінчена ε-сітка B. Взявши інтервал, кінці якого утворені мінімальним і максимальним елементами цієї ε-сітки, ми в будь-якому випадку зможемо занурити множину A в множину B. І навпаки, якщо множина дійсних чисел A є обмеженою, вона лежить в деякому інтервалі B. Цей інтервал при довільному $\varepsilon>0$ можна розбити на відрізки довжини ε, які утворюють скінчену ε-сітку.

Задача 9.4. Доведіть, що “гільбертова цегла” $A=\left\{x=\left\{\xi_n\right\}\in l_2:\left|\xi_n\right|\leq\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ є відносно компактною множиною.

Розв'язок. Ця множина є прикладом нескінченновимірної і цілком обмеженої множини. Оскільки l_2 — повний простір, то, щоб довести компактність “гільбертової цегли”, достатньо довести її цілковиту обмеженість.

Нехай задано довільне $\varepsilon>0$. Виберемо число n так, щоб

$$\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Кожній точці $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)\in A$ поставимо у відповідність точку $x^*=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,0,\ldots)$. Оцінимо відстань $\rho(x,x^*)$.

$$\rho(x,x^*)=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi_k^2}\le\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^k}}<\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$ [1]

Утворимо множину $A^*=\left\{x^*\in A\right\}$, що складається із “усічених послідовностей”. Вона є обмеженою в R^n, оскільки її можна заключити в куб, довжина ребра якого дорівнює одиниці. Згідно з наведеним вище зауваженням, вона є цілком обмеженою. Виберемо для множини A^* скінчену $\frac{\varepsilon}{2}$-сітку B для множини A. Тоді $\forall\varepsilon>0\ \forall x\in A\ \exists x^{**}\in B$:

$$\rho(x,x^{**})\le\rho(x,x^*)+\rho(x^*,x^{**})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отже, множина B є ε-сіткою “гільбертової цегли” A. Таким чином, множина A є відносно компактною. ■

Задача 9.5. Доведіть, що компактний метричний простір є сепарабельним.

Розв’язок. Нехай E — компактний метричний простір. Покладемо $\varepsilon_n=\frac{1}{n},\ n=1,2,\ldots$ і знайдемо в E скінченні ε_n-сітки B_n. Множина $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ є не більш ніж зліченною (скінченою або зліченною). Покажемо, що множина B є скрізь щільною в просторі E. Дійсно, для довільного $x\in E$ і довільного число $\varepsilon>0$ виберемо натуральне число n так, що $\frac{1}{n}\le\varepsilon$, а також точку $y\in B_n$, так що $\rho(x,y)<\varepsilon_n=\frac{1}{n}$. Оскільки $y\in B_n$, то $y\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$. Отже, $\rho(x,y)<\varepsilon_n=\frac{1}{n}<\varepsilon.$ Таким чином, $\overline{B}=E$. ■

Задача 9.6. Нехай A — множина неперервних на $[0,1]$ функцій, таких що $|x(t)|\le 1,\ t\in[0,1].$ Доведіть, що множина A не є відносно компактною в $C[0,1]$

Розв’язок. Виберемо в множині A послідовність функцій

[1] Нагадаємо, що $a+aq+aq^2+\ldots=\frac{a}{1-q}.$

Отже, $\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^n4}+\frac{1}{4^n4^2}+\ldots=\frac{1}{4^n\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4^{n-1}3}<\frac{1}{2^{n-1}}.$

$$x_n(t) = \sin 2^n \pi t,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Оцінимо відстань $\rho(x_m, x_n)$ і покажемо, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, тобто із неї не можна виділити жодну збіжну підпослідовність. Маємо

$$\rho(x_m, x_n) = \sup_{t\in[0,1]} |x_m(t) - x_n(t)| \geq \left| x_m\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) - x_n\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) \right| = 1,$$

оскільки

$$\sin 2^m \pi t\Big|_{t=\frac{1}{2^{m+1}}} = \sin 2^m \pi \frac{1}{2^{m+1}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\sin 2^n \pi t\Big|_{t=\frac{1}{2^{m+1}}} = \sin 2^{n-m-1}\pi = \sin 2l\pi = 0,\ l = 2^{k-n-2},\ \ k > n.$$

Задача 9.7. Доведіть, що в метричному просторі l_3 множина A послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких що $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$ є відносно компактною.

Розв'язок. Послідовність $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ належить l_3, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^3 < \infty$.

$$\rho^3(x_n, x_{n+p}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \to 0,\ n \to \infty\ \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. З огляду на те, що простір l_3 є повним, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною, а, значить, із неї можна виділити збіжну підпослідовність. Таким чином, множина A є відносно компактною. ■

Задача 9.8. Доведіть, що куля $S = \{x \in C[0, 2\pi] : |x(t)| \leq 1\}$ не є відносно компактною множиною в метричному просторі $\left(C[0, 2\pi],\ \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - y(t)|\right)$.

Розв'язок. З огляду на те, що простір $\left(C[0, 2\pi],\ \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - y(t)|\right)$ є повним, достатньо показати, що куля S не є цілком обмеженою множиною. Покладемо $x_n = \sin nt$. Ця послідовність належить кулі S. Оцінимо відстань $\rho(x_n, x_m)$.

$$\rho(x_n, x_m) = \sup_{t\in[0,2\pi]} |x_n(t) - x_m(t)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |\sin nt - \sin mt| \geq 1.$$

Отже, послідовність $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, із неї неможливо виділити збіжну підпослідовність. Таким чином, куля S не є відносно компактною в метричному просторі $\left(C[0, 2\pi],\ \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - y(t)|\right)$. ■

Задача 9.9. Доведіть, що метричний простір s всіх числових послідовностей з метрикою $\rho(x,y)=\sup\limits_n \dfrac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$ не є компактом.

Розв'язок. Метричний простір X є компактом, якщо будь-яка нескінченна підмножина цього простору містить послідовність, що збігається до деякого елемента із X . Розглянемо множину $E_{0,1}=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...):\xi_i\in\{0,1\}\right\}$ і утворимо із її елементів послідовність

$$x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...,\xi_n^{(n)},...\right).$$

Оцінимо відстань $\rho(x_n,x_m)$.

$$\rho(x_n,x_m)=\sup_i \frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|}=\frac{1}{2},\ n\neq m.$$

З цього випливає, що послідовність $x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...,\xi_n^{(n)},...\right)$ не є фундаментальною. Отже, з неї не можна виділити жодну збіжну послідовність. Таким чином, множина $E_{0,1}$ не є компактною. З цього випливає, що простір s не є компактом. ■

Задача 9.10. Доведіть, що секвенційно компактна множина $A\subset E$ була компактом в метричному просторі E тоді і лише тоді, коли вона є замкненою в E .

Розв'язок. Необхідність.

A — компакт $\Rightarrow\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\,\exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:x_{n_k}\to x\in A,\ n\to\infty\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n\to x\in A\ \Rightarrow A$ - замкнена.

Достатність.

A — секвенційно компактна і замкнена $\Rightarrow$

$\Rightarrow\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\,\exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:x_{n_k}\to x\in A,\ n\to\infty\Rightarrow A$ — компакт. ■