Урок 8. Повні метричні простори

Задачі 8.1-8.6 описують пряму конструкцію Кантора–Хаусдорфа поповнення метричного простору.

Задача 8.1. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальні послідовності в X. Доведіть, що числова послідовність $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною.

Розв'язок. Оскільки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність, то

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_1(\varepsilon) \, \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність, то

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) \, \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покладемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall n, m \geq N$ внаслідок виконується нерівність

$$\left|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)\right| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, послідовність $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ є фундаментальною. Оскільки R^1 є повним, то

$$\exists \alpha \in R^1 : \alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n).$$

■

Задача 8.2. Назвемо фундаментальні послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ еквівалентними, якщо послідовність $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до нуля. Доведіть, що це відношення є відношенням еквівалентності.

Розв'язок. Перевіримо, що це відношення є рефлексивним, симетричним і тразитивним.

а) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_n) = 0 \Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

б) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, x_n) = 0 \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

в) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, z_n) = 0,$$

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, z_n) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) = 0$.

■

Задача 8.3. Нехай $\tilde{X}$ — множина класів еквівалентних фундаментальних в X послідовностей. Якщо $\xi \in \tilde{X}$, $\eta \in \tilde{X}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \xi$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \eta$, то покладемо $\tilde{\rho}(\xi,\eta) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Доведіть $\tilde{\rho}(\xi,\eta)$ не залежить від вибору представників класів та є метрикою на $\tilde{X}$.

Розв'язок. Для довільної точки $x \in X$ позначимо через ξ клас всіх фундаментальних послідовностей, що збігаються до x. Цей клас є непорожнім, оскільки йому належить стаціонарна послідовність $(x, x, \ldots)$. До того ж, взявши як представників класів ξ і η стаціонарні послідовності, легко переконатися, що

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ y = \lim_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \tilde{\rho}(\xi,\eta).$$

Таким чином, ототожнюючи елемент $x \in X$ із класом $\xi \in \tilde{X}$, ми ізометрично зануримо X в метричний простір $\tilde{X}$, і в подальшому X можна вважати підпростором $\tilde{X}$.

Покажемо, що $\tilde{\rho}(\xi,\eta) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ не залежить від вибору представників $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ із класів ξ і η.

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \in \xi, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n'\}_{n=1}^{\infty} \in \eta\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N$$

$$\left|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n')\right| \leq \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n') = \tilde{\rho}(\xi,\eta).$$

Доведемо, що класи еквівалентних послідовностей з указаною відстанню утворюють метричний простір $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$, тобто виконуються аксіоми метрики.

а) $\tilde{\rho}(\xi,\eta) \geq 0$?

$$\rho(x_n, y_n) \geq 0 \Rightarrow \tilde{\rho}(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \geq 0.$$

б) $\tilde{\rho}(\xi,\eta) = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta.$?

$$\tilde{\rho}(\xi,\eta) = 0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \in \xi, \{y_n\} \in \eta$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \tilde{\rho}(\xi,\eta) = 0 \Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \xi = \eta..$$

в) $\tilde{\rho}(\xi,\eta) \leq \tilde{\rho}(\xi,\varsigma) + \tilde{\rho}(\varsigma,\eta)$?

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \xi, \{y_n\} \in \eta, \{z_n\} \in \varsigma$$

$$\tilde{\rho}(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, y_n) =$$

$$= \tilde{\rho}(\xi,\varsigma) + \tilde{\rho}(\varsigma,\eta).$$

■

Задача 8.4. Доведіть, що $\left(\tilde{X},\tilde{\rho}\right)$ — повний метричний простір.

Розв'язок. Нехай $\left\{x_n\right\}$ — представник класу ξ. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)=0.$$

Дійсно, $\forall\varepsilon>0\,\exists N\left(\varepsilon\right)>0:\forall n,m\geq N$

$$\rho\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon.$$

З цього випливає, що $\forall\varepsilon>0\,\exists N\left(\varepsilon\right)>0:\forall n,m\geq N$

$$\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)=\lim_{m\to\infty}\rho\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi \text{ в } \tilde{E}.$$

Таким чином, $\forall\xi\in\tilde{X}\;\exists x\in X$

$$\tilde{\rho}\left(x,\xi\right)<\varepsilon.$$

Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ — фундаментальна послідовність класів. Візьмемо послідовність $\varepsilon_n\to\infty$. Відповідно до сказаного вище, $\forall n\,\exists x_n\in E$:

$$\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)<\varepsilon_n.$$

Утворимо із таких точок послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Доведемо, що ця послідовність є фундаментальною:

$$\tilde{\rho}\left(x_n,x_m\right)\leq\tilde{\rho}\left(x_n,\xi_n\right)+\tilde{\rho}\left(\xi_n,\xi_m\right)+\tilde{\rho}\left(\xi_m,x_m\right)<\varepsilon_n+\varepsilon_m+\rho\left(\xi_n,\xi_m\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_m=0,\ \lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(\xi_n,\xi_m\right)=0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(x_n,x_m\right)=0.$$

З цього випливає, що

$$\exists\xi\in\tilde{X}:\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)=0.$$

Отже,

$\tilde{\rho}\left(\xi_n,\xi\right)\leq\tilde{\rho}\left(\xi_n,x_n\right)+\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)<\varepsilon_n+\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\in\tilde{X}$. З цього випливає, що простір $\tilde{X}$ — повний.

■

Задача 8.5. Кожному $x\in X$ поставимо у відповідність клас $\varphi\left(x\right)\in\tilde{X}$, що містить стаціонарну послідовність $\left(x,x,\ldots\right)$. Доведіть, що відображення φ — це ізометрія X і $\tilde{X}$ (тобто простір X можна ототожнити з $\varphi\left(X\right)$ і, таким чином, вкласти X в повний метричний простір $\tilde{X}$).

Розв'язок. Доведемо єдиність поповнення. Припустимо, що $\left(\tilde{X}_1,\rho_1\right)$ і $\left(\tilde{X}_2,\rho_2\right)$ — два різних поповнення простору E. Побудуємо взаємно-однозначне відображення

$$\varphi:\tilde{E}_1\to\tilde{E}_2$$

так, щоб виконувалися умови

1) $\varphi(x) = x \ \ \forall x \in X$, $X \subset \tilde{X}_1$, $E \subset \tilde{X}_2$;

2) $\xi \leftrightarrow \xi^*, \eta \leftrightarrow \eta^* \Rightarrow \tilde{\rho}_1(\xi,\eta) = \tilde{\rho}_2(\xi^*,\eta^*)$, де $\tilde{\rho}_1$— відстань в $(\tilde{X}_1,\rho_1)$, в $\tilde{\rho}_2$— відстань в $(\tilde{X}_2,\rho_2)$.

Нехай $\xi \in \tilde{X}_1$. Тоді за означенням поповнення $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Крім того, $E \subset \tilde{X}_2 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{X}_2$. Отже, $\exists \xi^* \in \tilde{X}_2$ (оскільки $\tilde{X}_2$ — повний простір) такий , що $\xi^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Покладемо

$$\varphi(\xi) \overset{def}{=} \xi^*.$$

Покажемо, що φ задовольняє умови 1) и 2). Для цього розглянемо послідовності

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \xi \text{ в } \tilde{X}_1,\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \xi^* \text{ в } \tilde{X}_2,$$
$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to \eta \text{ в } \tilde{X}_1,\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to \eta^* \text{ в } \tilde{X}_2.$$

Внаслідок ізометричності поповнення,

$$\tilde{\rho}_1(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$
$$\tilde{\rho}_2(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

З цього випливає, що

$$\tilde{\rho}_1(\xi,\eta) = \tilde{\rho}_2(\xi,\eta).$$

Таким чином, простори $(\tilde{X}_1,\tilde{\rho}_1)$ і $(\tilde{X}_2,\tilde{\rho}_2)$ співпадають з точністю до ізометрії. ■

Задача 8.6. Доведіть, що множина $\varphi(X)$ скрізь щільна в $\tilde{X}$ і $\varphi(X) = \tilde{X}$, якщо простір $\tilde{X}$ — повний.

Розв'язок. Нехай $\{x_n\}$— представник класу ξ. Тоді, як показано в задачі 8.4,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(x_n,\xi) = 0.$$

Дійсно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n,m \ge N$

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

З цього випливає, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n,m \ge N$

$$\tilde{\rho}(x_n,\xi) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \text{ в } \tilde{E}.$$

Таким чином, $\forall \xi \in \tilde{X}\ \exists x \in X$

$$\tilde{\rho}(x,\xi) < \varepsilon.$$

Як точку x можна взяти довільну точку x_n, $n \geq N(\varepsilon)$, тобто довільний окіл класу ξ містить деяку точку x із E. Це означає, що

$$\bar{X} = \tilde{X}.$$

■

Озн. 8.1. *Відображення* $g:(X,\rho)\to(X,\rho)$ *називається* ***стискаючим****, якщо існує таке число* $0<\alpha<1$, *що* $\rho\big(g(x),g(y)\big)\leq\alpha\rho(x,y)$ *для довільних* $x,y\in X$.

Задача 8.8. *Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.*

Розв’язок. Нехай $x_n \to x$, а $g: X \to X$ є стискаючим відображенням. Тоді

$$0\leq\rho\big(g(x_n),g(x)\big)\leq\alpha\rho(x_n,x)\to 0, n\to\infty.$$

Отже,

$$g(x_n)\to g(x), \text{ коли } x_n \to x. \ ■$$

Задача 8.9 (принцип стискаючих відображень). *Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору* (X,ρ) *в себе має лише одну нерухому точку, тобто* $\exists! x\in X: g(x)=x$.

Розв’язок. Нехай x_0 — деяка точка із X. Визначимо послідовність точок $\{x_n\}$ за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0),\ldots,x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо $m>n$, то

$$\rho(x_n,x_m)=\rho\big(g(x_{n-1}),g(x_{m-1})\big)\leq\alpha\rho(x_{n-1},x_{m-1})\leq\ldots\leq$$
$$\leq\alpha^n\rho(x_0,x_{m-n})\leq\alpha^n\big\{\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\ldots+\rho(x_{m-n-1},x_{m-n})\big\}\leq$$
$$\leq\alpha^n\rho(x_0,x_1)\big\{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-n-1}\big\}\leq\alpha^n\rho(x_0,x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Таким чином, оскільки $0<\alpha<1$,

$$\rho(x_n,x_m)\to 0, n\to\infty, m\to\infty, m>n.$$

Внаслідок повноти простору (X,ρ) в ньому існує границя послідовності $\{x_n\}$. Позначимо її через $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Із задачі 8.3 випливає, що

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо $g(x)=x$ і $g(y)=y$, то $\rho(x,y)\leq\alpha\rho(x,y)$, тобто $\rho(x,y)=0$. за аксіомою тотожності це означає, що $x=y$. ■

Задача 8.10. Доведіть, що умову $\alpha\leq 1$ не можна замінити на $\alpha<1$.

Розв’язок. Якщо відображення $g:(X,\rho)\to(X,\rho)$ має властивість $\rho(g(x),g(y))<\rho(x,y)\quad \forall x,y\in X,\ x\neq y$, то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір $([1,\infty),|x-y|)$ і визначимо відображення $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Тоді $\rho(g(x),g(y))=\left|x+\dfrac{1}{x}-y-\dfrac{1}{y}\right|<|x-y|$. Оскільки для жодного $x\in[1,\infty)$ $g(x)=x+\dfrac{1}{x}\neq x$, нерухомої точки немає. ■

Задача 8.11. Доведіть, що простір l_p, що складається з послідовностей $x_n=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)$, які задовольняють умову $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$, є повним.

Розв’язок. Нехай $x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\ldots,\xi_k^{(n)},\ldots\right)$ — фундаментальна послідовність в l_p. Інакше кажучи,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0:\forall n,m\geq N(\varepsilon)\ \rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

З іншого боку,

$$\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\ \Rightarrow\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{1/p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n,m\to\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|\leq\lim_{n,m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{1/p}=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow\exists x_k=(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_k,\ldots)$, де $\xi_k=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}$.

Отже, мають місце такі твердження.

$$\forall M>0\,\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0:\forall n,m\geq N(\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{M}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|<\varepsilon^p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0\,\forall n,m\geq N(\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p<\varepsilon^p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0\,\forall n\geq N(\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|^p<\varepsilon^p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0\,\forall n\geq N(\varepsilon)\ \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|^p\right)^{1/p}<\varepsilon\ \Rightarrow\ l_p$$ — повний простір. ■

Задача 8.12. Доведіть, що простори всіх алгебраїчних поліномів з наступними метриками не є повними.

1). $\rho(P,Q)=\max\limits_{t\in[0,1]}|P(t)-Q(t)|$;

2). $\rho(P,Q)=\int\limits_0^1 \left|P(t)-Q(t)\right|dt;$

3). $\rho(P,Q)=\sum\limits_n \left|c_n\right|$, де $P(t)-Q(t)=\sum\limits_n c_n t^n.$

Побудуйте поповнення цих просторів.

Розв'язок. Розглянемо послідовність поліномів $P_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$. Покажемо, що ця послідовність є фундаментальному в розгляданому метричному просторі алгебраїчних поліномів в кожній із метрик, але збігається не до алгебраїчного полінома, а до неперервної функції e^t. Нагадаємо формулу Маклорена для функції e^t.

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+R_{n+1}(t),$$

де $R_{n+1}(t)=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta t}$, $0<\theta<1$ — залишковий член в формі Лагранжа.

1). Припустимо, що *n* > *m*.

$$\rho\big(P_m(t),P_n(t)\big)=\max_{t\in[0,1]}\left|P_m(t)-P_n(t)\right|=\max_{t\in[0,1]}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k=\lim_{n\to\infty}R_{m+1}(t)<\lim_{m\to\infty}\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta t}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(m+1)!}e=0.$$

Тепер доведемо, що послідовність $\{P_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ не може збігатися до жодного алгебраїчного полінома. Нехай $Q(t)$— деякий алгебраїчний поліном. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},Q(t)\right)\le\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)+\rho\big(P_n(t),Q(t)\big)$$

Величина в правій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k=\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(t)<\lim_{n\to\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta t}\le\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(n+1)!}=0.$$

Отже, величина $\rho\big(P_n(t),Q(t)\big)$ не може прямувати до нуля, а, значить, послідовність $\{P_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ не може прямувати до жодного алгебраїчного полінома.

2). Припустимо, що *n* > *m*.

$$\rho\big(P_m(t),P_n(t)\big)=\int_0^1\left|P_m(t)-P_n(t)\right|dt=\int_0^1\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k\right|dt\le\int_0^1\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\right|dt\,.$$

Отже,

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho\left(P_m(t),P_n(t)\right)=\lim_{n,m\to\infty}\int_0^1\left|P_m(t)-P_n(t)\right|dt=\int_0^1\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k dt=\lim_{m\to\infty}\int_0^1\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k dt$$

=

$$=\lim_{m\to\infty}\int_0^1 R_{m+1}(t)dt<\lim_{m\to\infty}\int_0^1\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta t}dt\le\lim_{m\to\infty}\frac{e}{(m+1)!}=0.$$

Тепер доведемо, що послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може збігатися до жодного алгебраїчного полінома. Нехай $Q(t)$— деякий алгебраїчний поліном. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},Q(t)\right)\le\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)+\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$$

Величина в правій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty}\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_{n+1}(t)dt\le\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta t}dt\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}e=0.$$

Отже, величина $\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$ не може прямувати до нуля, а, значить, послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може прямувати до жодного алгебраїчного полінома.

3). Припустимо, що $n>m$.

$$\rho\left(P_m(t),P_n(t)\right)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Отже,

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=0.$$

Тепер доведемо, що послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може збігатися до жодного алгебраїчного полінома. Нехай $Q(t)$— деякий алгебраїчний поліном. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},Q(t)\right)\le\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)+\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$$

Величина в правій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty}\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=0.$$

Отже, величина $\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$ не може прямувати до нуля, а, значить, послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може прямувати до жодного алгебраїчного полінома.

Поповнення всіх трьох просторів є простір $C[0,1]$. ■

Задача 8.13. Доведіть наступні твердження.

1) Простір C_{L_2} усіх неперервних на $[a,b]$ функцій з метрикою $\rho_{L_2}(f,g)=\left(\int_a^b (f(t)-g(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ не є повним.

2) Простір $C_0(-\infty,\infty)$, що складається із неперервних функцій, які визначені на R^1 і задовольняють умову $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)=0$, з метрикою $\rho(f,g)=\sup\limits_{t\in R^1}|f(t)-g(t)|$ є повним.

3) Простір $C^{(n)}[a,b]$ n разів неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій з метрикою $\rho(f,g)=\max\limits_{0\le k\le n}\sup\limits_{t\in[a,b]}\left|f^{(k)}(t)-g^{(k)}(t)\right|$ є повним.

4) Простір $C^{(n)}[a,b]$ n разів неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій з метрикою $\rho(f,g)=\left(\int_a^b\sum_{k=0}^n\left|f^{(k)}(t)-g^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $p\ge 1$ не є повним.

Розв’язок.

1). Розглянемо послідовність неперервних функцій

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1, & \textit{якщо } a\le t\le \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{1}{n},\\ nt, & \textit{якщо } \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{n},\\ 1, & \textit{якщо } \dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$

Ця послідовність є фундаментальною в $C_{L_2}[a,b]$, оскільки

$$\int_a^b(\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\,dt\le\frac{b-a}{min(n,m)}.$$

Покажемо, що ця послідовність не збігається до жодної функції з простору $C_{L_2}[a,b]$. Дійсно, нехай f — деяка функція із $C_{L_2}[a,b]$ і

$$\psi(t)=\begin{cases}-1, & \textit{якщо } t<0,\\ 1, & \textit{якщо } t\ge 0.\end{cases}$$

Внаслідок нерівності Мінковського

$$\left(\int_a^b(f(t)-\psi(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_a^b(f(t)-\varphi_n(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Оскільки функція f є неперервною, то інтеграл в лівій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(\varphi_n\left(t\right)-\psi\left(t\right)\right)^2 dt=0 .$$

Отже, $\left(\int_a^b\left(f\left(t\right)-\varphi_n\left(t\right)\right)^2\right)$ не може прямувати до нуля при $n\to\infty$.

2). Для доведення повноти простору $C_0\left(-\infty,\infty\right)$ розглянемо фундаментальну послідовність $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ і покажемо, що вона прямує до неперервної функції, яка задовольняє умову $\lim\limits_{|t|\to\infty} f\left(t\right)=0$. Для цього розглянемо сегмент $\left[-T,T\right]$. Оскільки в повному просторі $C\left[-T,T\right]$ з метрикою $\rho\left(f,g\right)=\sup\limits_{t\in[-T,T]}\left|f\left(t\right)-g\left(t\right)\right|$ послідовність $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ прямує до неперервної функції $f\left(t\right)$, залишається довести, що функція $f\left(t\right)$ задовольнятиме умові $\lim\limits_{|t|\to\infty} f\left(t\right)=0$. Дійсно,

$$\lim_{|t|\to\infty} f\left(t\right)=\lim_{|t|\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n\left(t\right)=\lim_{n\to\infty}\lim_{|t|\to\infty} f_n\left(t\right)=0.$$

3). Розв’язання цієї задачі базується на тому факті, що простір $C^{(n)}\left[-T,T\right]$ є повним. Решта міркувань збігаються с попередніми.

4). Задача розв’язується аналогічно задачі 8.12.1.