

Урок 7. Метричні простори

Задача 7.1. Доведіть, що метричний простір є хаусдорфовим.

Розв’язок. Якщо $x \neq y$, то $\rho(x, y) = r > 0$. Відкриті кулі $S\left(x, \frac{r}{3}\right)$ і $S\left(y, \frac{r}{3}\right)$ є відкритими множинами, до того ж вони не перетинаються. Достатньо для довільних $x, y \in X$ покласти $V_x = S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, y)\right)$ і $V_y = S\left(y, \frac{1}{3}\rho(x, y)\right)$. ■

Наслідок. Збіжна послідовність в метричному просторі може мати лише одну границю.

Задача 7.2. Доведіть, що метричний простір є нормальним топологічним простором.

Розв’язок. Нехай (X, ρ) — метричний простір, F_1, F_2 — замкнені множини, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Припустимо, що $x_1 \in F_1$ і $x_2 \in F_2$. Введемо такі позначення:

$$\rho(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} \rho(x, y), \quad \rho(y, F_1) = \inf_{x \in F_1} \rho(y, x).$$

Оскільки F_1, F_2 — замкнені множини і $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, то

$$\rho(x, F_2) > 0 \quad \text{і} \quad \rho(y, F_1) > 0.$$

Побудуємо відкриті кулі

$$S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right) \quad \text{і} \quad S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right).$$

Позначимо

$$V_1 = \bigcup_{x \in F_1} S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right), \quad V_2 = \bigcup_{y \in F_2} S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right).$$

Оскільки кулі $S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right)$ і $S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right)$ є відкритими множинами, то і множини V_1 і V_2 є відкритими. Доведемо, що $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Припустимо супротивне. Нехай $\exists z \in V_1 \cap V_2$. Тоді $\exists x_0 \in F_1 : \rho(x_0, z) < \frac{1}{3}\rho(x_0, F_2)$ і $\exists y_0 \in F_2 : \rho(z, y_0) < \frac{1}{3}\rho(y_0, F_1)$. Припустимо, для визначеності, що $\rho(x_0, F_2) \leq \rho(y_0, F_1)$. Отже,

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) \leq \frac{1}{3}\rho(x_0, F_2) + \frac{1}{3}\rho(y_0, F_1) \leq \frac{2}{3}\rho(y_0, F_1) < \rho(y_0, F_1).$$

Це суперечить означенню відстані від точки y_0 до множини F_1 (інфімум серед усім можливих відстаней). Отримане протиріччя доводить теорему. ■

Задача 7.3 (задача божевільного математика). Чи може в метричному просторі замкнена куля більшого радіуса міститись в замкненій кулі меншого радіуса?

Розв’язок. Розглянемо метричний простір $(\mathbb{R}^2, \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})$, інакше кажучи — евклідову площину. Побудуємо на цій площині дві кулі:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}, \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Перша куля має центр в точці $(0, 0)$ і радіус 3, а друга — центр в точці $(2, 0)$ і радіус 4. Утворимо **новий** метричний простір (S_1, ρ) , зберігши евклідову метрику, а як носій обравши множину кулю S_1 . Побудуємо множину $S = S_1 \cap S_2$. В просторі (S_1, ρ) множина $S = S_1 \cap S_2$ містить точки із S_1 , які лежать від точки $(0, 2)$ на відстані не більше 4, тобто кулю з центром в точці $(0, 2)$ і радіусом 4. З іншого боку, сам простір (S_1, ρ) є замкненою кулею з центром в точці $(0, 0)$ і радіусом 3. Отже, замкнена куля більшого радіуса містить замкнену кулю меншого радіуса. ■

Задача 7.4. Доведіть, що у довільному метричному просторі (X, ρ) замикання відкритої кулі $S(x_0, r) = \{y \in X : \rho(x_0, y) < r\}$ міститься в замкненій кулі $S^*(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$, тобто $\overline{S(x_0, r)} \subset S^*(x_0, r)$. Чи завжди виконується рівність $\overline{S(x_0, r)} = S^*(x_0, r)$?

Розв’язок. Нехай $x \in \overline{S(x_0, r)}$. Тоді $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in S(x_0, r) : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Крім того,

$$\rho(x, x_0) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_0) < \rho(x, x_n) + r.$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ і зважаючи на неперервність метрики, доходимо висновку, що

$$\rho(x, x_0) \leq r.$$

Отже, точки дотику кулі $S(x_0, r)$ містяться в кулі $S^*(x_0, r)$, тобто $\overline{S(x_0, r)} \subset S^*(x_0, r)$. Покажемо тепер, що рівність виконується не для будь-яких метричних просторів.

Нехай X — довільна множина, що містить хоча б дві точки. Введемо метрику

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \neq y, \\ 0, & \text{якщо } x = y. \end{cases}$$

Побудуємо метричний простір (X, ρ) — простір ізольованих точок. Нехай x — довільна точка із множини X . Тоді $S(x, 1) = \{x\}$, а $S^*(x, 1) = X$. В цьому просторі відкрита куля є і замкненою множиною. Отже, $S(x, 1) = \overline{S(x, 1)} \neq S^*(x, 1)$. Отже, рівність виконується не завжди. ■

Задача 7.5. Доведіть, що у довільному метричному просторі (X, ρ) будь-яка скінченна множина є замкненою множиною.

Розв’язок. Оскільки метричні простори є різновидом топологічних, то множина є замкнутою, якщо вона співпадає із своїм замиканням. За теоремою 7.4 кожна точка дотику множини є границею деякої послідовності її точок, отже замикання є підмножиною множини границь всіх послідовностей. З іншого боку, кожна границя будь-якої послідовності елементів деякої множини є точкою дотику цієї множини. Отже, можна сформулювати таке означення: множина в метричному просторі називається замкнутою, якщо вона містить всі границі всіх збіжних послідовностей її елементів.

Розглянемо скінченну множину $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Будь-яка збіжна послідовність її елементів повинна містити нескінченну кількість однакових елементів, тобто утворювати стаціонарну послідовність. Отже, будь-яка послідовність елементів множини F збігається до одного із її елементів, тобто скінченна множина є замкнутою. ■

Задача 7.6. Розглянемо множину векторів $R^n = \{x = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$ і введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ відстань

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}. \text{ Доведіть, що простір } (R^n, \rho) \text{ є метричним.}$$

Розв’язок. Покажемо, що функція $\rho(x, y)$ є метрикою. Для цього перевіримо виконання властивостей метрики.

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

Дійсно, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \quad \forall x, y \in R^n$. Крім того,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in R^n$?

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in R^n.$$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in R^n$?

Для доведення нерівності трикутника скористаємося нерівністю Коші.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Дійсно, увівши в розгляд невід’ємну допоміжну функцію

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 \geq 0,$$

отримуємо квадратний трьохчлен

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0.$$

Оскільки цей трьохчлен є невід’ємним і коефіцієнт при першій степені x є парним, його дискримінант менше або дорівнює нулю.

$$\varphi(x) = Ax^2 + 2Bx + C \geq 0, \quad A = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad B = 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^n b_i^2 \Rightarrow B^2 - AC \leq 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Отже, нерівність Коші доведено. Добуваючи з цієї нерівності квадратний корінь, доходимо висновку, що

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Виділимо в лівій і правій частині повний квадрат. Для цього помножимо цю нерівність на 2.

$$2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Тепер додамо до обох частин число $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2$.

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2.$$

Добуваючи квадратний корінь з обох частин цієї нерівності, отримуємо, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Введемо в розгляд вектор $z = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ і зважимо на рівність $x - y = x - z + z - y$. З цього випливає, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((a_i - c_i) + (c_i - b_i))^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - b_i)^2}.$$

Інакше кажучи,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір (R^n, ρ) є метричним. ■

Задача 7.7. Розглянемо множину послідовностей, таких що ряд, складений з квадратів їх координат, збігається: $l_2 = \left\{ x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty, a_i \in \mathbb{R} \right\}$, і

введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$

відстань $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}$. Доведіть, що простір (l_2, ρ) є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що

функція $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}$ є визначеною для всіх елементів x і y , тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2$ збігається для всіх $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ із множини l_2 . З попередньої задачі маємо, що

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i + (-b_i))^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (-b_i)^2} \right)^2.$$

Отже, збільшивши і правій частині кількість невід’ємних доданків до ∞ , отримуємо

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} \right)^2.$$

Оскільки $x \in l_2$ і $y \in l_2$, то $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} < \infty$ і $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} < \infty$ відповідно. З цього випливає, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \leq \text{const} < \infty.$$

Як відомо із курсу математичного аналізу, якщо часткові суми додатного ряду є обмеженими, то цей ряд збігається. Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2$ збігається, і

відстань $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}$ є визначеною для всіх елементів $x \in l_2$ і $y \in l_2$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} \geq 0. \text{ Це очевидно.}$$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_i = b_i \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in l_2$?

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)^2} = \rho(y, x).$$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in l_2$?

Вище ми довели нерівність

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} \right)^2.$$

Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$. За теоремою про мажоруючу послідовність, отримаємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} \right)^2.$$

Добуваючи з цієї нерівності квадратний корінь, доходимо висновку, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}.$$

Введемо в розгляд вектор $z = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ і подамо вектор y вигляді $x - y = x - z + z - y$. В такому випадку,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} ((a_i - c_i) + (c_i - b_i))^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (c_i - b_i)^2} = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір (l_2, ρ) є метричним. ■

Задача 7.8. Розглянемо множину послідовностей, таких що ряд, складений з модулів їх координат, збігається: $l = \left\{ x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty, a_i \in \mathbb{R} \right\}$, і введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ відстань $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|$. Доведіть, що простір (l, ρ) є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|$ є визначеною для всіх елементів x і y , тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|^2$ збігається для всіх $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ із множини l . Із властивостей модуля і умови $x \in l$ і $y \in l$ випливає, що

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i + (-b_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |-b_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < \infty.$$

Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|$ збігається, і відстань $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|$ є визначеною для всіх елементів $x \in l$ і $y \in l$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} \geq 0. \text{ Це очевидно.}$$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| = 0 \Leftrightarrow |a_i - b_i| = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_i = b_i \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in l$?

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i|} = \rho(y, x).$$

$$3) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in l?$$

Введемо в розгляд вектор $z = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ і подамо вектор y вигляді $x - y = x - z + z - y$. В такому випадку,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |(a_i - c_i) + (c_i - b_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - c_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |c_i - b_i| = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір (l, ρ) є метричним. ■

Задача 17.9. Розглянемо множину всіх обмежених нескінченних числових послідовностей, таких що ряд, складений з модулів їх координат, збігається:

$m = \left\{ x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : \sup_i |a_i| < \infty \right\}$, і введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ відстань $\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$. Доведіть, що простір (m, ρ) є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$ є визначеною для всіх елементів x і y , тобто число

$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$ є скінченим для всіх $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ із множини m . Із властивостей модуля і умови $x \in m$ і $y \in m$ випливає, що

$$\sup_i |a_i - b_i| \leq \sup_i |a_i + (-b_i)| \leq \sup_i |a_i| + \sup_i |-b_i| = \sup_i |a_i| + \sup_i |b_i| < \infty.$$

Таким чином, число ряд $\sup_i |a_i - b_i|$ є скінченим, і відстань $\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$ є визначеною для всіх елементів $x \in m$ і $y \in m$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

$$1) \rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y?$$

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i| \geq 0. \text{ Це очевидно.}$$

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i| = 0 \Leftrightarrow |a_i - b_i| = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i \Leftrightarrow x = y.$$

$$2) \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in m?$$

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i| = \sup_i |b_i - a_i| = \rho(y, x).$$

$$3) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in m?$$

Введемо в розгляд вектор $z = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ і подамо вектор y вигляді $x - y = x - z + z - y$. В такому випадку, із властивостей \sup випливає, що

$$\begin{aligned} |a_i - b_i| &\leq |(a_i - c_i) + (c_i - b_i)| \leq |a_i - c_i| + |c_i - b_i| \leq \\ &\leq \sup_i |a_i - c_i| + \sup_i |c_i - b_i| \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отже,

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i| \leq \sup_i |a_i - c_i| + \sup_i |c_i - b_i| \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким чином, простір (m, ρ) є метричним. ■

Задача 7.10. Розглянемо множину всіх нескінченних числових послідовностей, $s = \{x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)\}$ і введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ відстань $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}$. Доведіть, що простір (s, ρ) є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}$ є визначеною для всіх елементів x і y , тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}$ збігається для всіх $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ і $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ із множини s .

$$\frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \leq \frac{1}{2^i} \Rightarrow \rho(x, y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Отже, оскільки ряд складається із додатних членів і всі його часткові суми є обмеженими, він є збіжним і відстань $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}$ є визначеною для всіх елементів $x \in s$ і $y \in s$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \geq 0. \text{ Це очевидно.}$$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |a_i - b_i| = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in s$?

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|b_i - a_i|}{1 + |b_i - a_i|} = \rho(y, x).$$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in s$?

Спочатку доведемо допоміжну нерівність.

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} \leq \frac{\beta}{1 + \beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : 0 \leq \alpha \leq \beta.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha \leq \beta &\Rightarrow \alpha + \alpha\beta \leq \beta + \alpha\beta \Rightarrow \alpha(1 + \beta) \leq \beta(1 + \alpha) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\alpha(1 + \beta)}{(1 + \alpha)(1 + \beta)} \leq \frac{\beta(1 + \alpha)}{(1 + \alpha)(1 + \beta)} \Rightarrow \frac{\alpha}{1 + \alpha} \leq \frac{\beta}{1 + \beta}. \end{aligned}$$

Введемо в розгляд вектори елементами $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ і $z = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$. В такому випадку,

$$|a_i - b_i| \leq |(a_i - c_i) + (c_i - b_i)| \leq |a_i - c_i| + |c_i - b_i|.$$

Покладемо,

$$\alpha = |a_i - b_i|, \beta = |a_i - c_i| + |c_i - b_i|.$$

Тоді маємо,

$$\begin{aligned} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} &\leq \frac{|a_i - c_i| + |c_i - b_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} = \\ &= \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} + \frac{|c_i - b_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} \leq \\ &\leq \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i|} + \frac{|c_i - b_i|}{1 + |c_i - b_i|}. \end{aligned}$$

Множачи на $\frac{1}{2^i}$ і сумуючи обидві частини нерівності, отримуємо таку нерівність.

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|c_i - b_i|}{1 + |c_i - b_i|} = \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Таким чином, простір (s, ρ) є метричним. ■

Задача 7.11. Розглянемо множину $C[a, b]$ всіх функцій, неперервних на відрізку $[a, b]$ і введемо між довільними її елементами $x(t)$ і $y(t)$ відстань $\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$. Доведіть, що простір $(C[a, b], \rho)$ є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ є визначеною для всіх елементів x і y , тобто число $\max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ є скінченним. Дійсно, за другою теоремою Вейерштрасса, якщо функція $f(t)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на ньому свої нижні і верхні грані, тобто своїх мінімальне і максимальне значення. Отже, оскільки різниця неперервних функцій є неперервною функцією, відстань $\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ є визначеною для всіх елементів $x \in C[a, b]$ і $y \in C[a, b]$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \geq 0. \text{ Це очевидно.}$$

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t) \forall t \in [a, b] \Leftrightarrow x(t) \equiv y(t).$$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in C[a, b]$?

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [a, b]} |y(t) - x(t)| = \rho(y, x).$$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in C[a, b]$?

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in [a, b]} |z(t) - y(t)| = \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in [a, b]} |z(t) - y(t)| = \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Таким чином, простір $(C[a, b], \rho)$ є метричним. ■

Задача 7.12. Розглянемо множину $C[a, b]$ всіх функцій, неперервних на відрізку $[a, b]$ і введемо між довільними її елементами $x(t)$ і $y(t)$ відстань

$$\rho_{L_2}(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}. \text{ Доведіть, що простір } (C[a, b], \rho_{L_2}) \text{ є метричним.}$$

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що

функція $\rho_{L_2}(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}$ є визначеною для всіх елементів x і y ,

тобто число $\sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}$ є скінченним. По-перше, неперервні функції є інтегрованими. По-друге, якщо функції $f(t)$ і $g(t)$ є інтегрованими на відрізку $[a, b]$ і $f(t) \leq g(t)$ на всьому відрізку, то

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

З другої теореми Вейерштрасса випливає, що

$$(x(t) - y(t))^2 \leq \max_{t \in [a, b]} (x(t) - y(t))^2 = C.$$

В такому випадку

$$\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} (x(t) - y(t))^2 = C(b - a).$$

Отже,

$$\sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} \leq \sqrt{C(b - a)}.$$

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} \geq 0. \text{ Це очевидно.}$$

Необхідність.

$$x(t) \equiv y(t) \quad t \in [a, b] \Rightarrow \rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} = 0.$$

Достатність.

$$\sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} = 0 \Rightarrow \int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt = 0.$$

Розглянемо первісну

$$F(s) = \int_a^s (x(t) - y(t))^2 dt \quad \forall s \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall s \in [a, b] \quad F'(s) = (x(s) - y(s))^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall s \in [a, b] \quad F(s_2) - F(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} F'(t) dt \geq 0, \quad s_2 \geq s_1.$$

Розглянемо довільну точку s на відрізку $[a, b]$: $a \leq s \leq b$. З цього випливає, що

$$0 = F(a) \leq F(s) \leq F(b) = \int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt = 0 \quad \forall s \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(s) \equiv 0 \quad \forall s \in [a, b] \Rightarrow (x(t) - y(t))^2 \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv y(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in C[a, b]$?

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} = \sqrt{\int_a^b (y(t) - x(t))^2 dt} = \rho(y, x).$$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in C[a, b]$?

Нехай $f(t), g(t) \in C[a, b]$. Введемо допоміжну невід’ємну функцію

$$\varphi(x) = \int_a^b (sf(t) + g(t))^2 dt = s^2 \int_a^b f^2(t) dt + 2s \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt \geq 0$$

Перепишемо цю нерівність в наступному вигляді.

$$As^2 + 2Bs + C \geq 0,$$

де $A = \int_a^b f^2(t) dt$, $B = \int_a^b f(t)g(t) dt$, $C = \int_a^b g^2(t) dt$. З цього випливає, що

дискримінант відповідного квадратного трьохчлена відносно s менше або дорівнює нулю.

$$B^2 - AC \leq 0.$$

Отже, ми довели нерівність Буняковського

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)$$

Добудемо квадратний корінь з обох частин нерівності Буняковського.

$$\int_a^b f(t)g(t) dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

Додамо до обох частин суму $\int_a^b x^2(t) dt + \int_a^b y^2(t) dt$.

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f^2(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt \leq \\ & \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} + \int_a^b f^2(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt. \end{aligned}$$

З цієї нерівності випливає, що

$$\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt \leq \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \right)^2.$$

Отже,

$$\sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}.$$

Покладемо $f(t) \equiv x(t) - z(t)$, $g(t) = z(t) - y(t)$. Тоді

$$\sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b (x(t) - z(t))^2 dt} + \sqrt{\int_a^b (z(t) - y(t))^2 dt}.$$

Таким чином, простір $(C[a, b], \rho_{L_2})$ є метричним. ■