## Урок 6. Компактність в топологічних просторах

**Задача 6.1.** Доведіть, що тривіальний простір завжди є компактним.

*Розв'язок.* Тривіальна топологія має вигляд $\tau = \{\varnothing, X\}$. Отже, єдиним відкритим покриттям множини-носія $X$ є вона сама. Таким чином, в довільному відкритому покритті (що складається із одного елемента — самої множини $X$) існує скінченне підпокриття (що складається із одного елемента — самої множини $X$). ■

**Задача 6.2.** Доведіть, що дискретний простір є компактним тоді і лише тоді, коли він складається із скінченної кількості точок.

*Розв'язок. Необхідність*. Дискретний простір має вигляд $\left(X, 2^X\right)$. Припустимо, що простір компактний, а $S = \{G_i, i \in I\}$ — його *довільне* відкрите покриття. Оскільки простір компактний, існує скінченне підпокриття $P = \{G_k, k = 1, ..., n\} \subset S$. Одним із відкритих покриттів дискретного топологічного простору є база, яка складається із одноточкових множин. Якби простір складався б із нескінченної кількості точок, то в базі ми не змогли б виділити скінченну підсистему, яка сама була б покриттям. Отже, компактний дискретний простір повинен містити лише скінченну кількість точок.

*Достатність*. Якщо множина $X$ містить скінченну кількість точок, то сукупність всіх підмножин множини $X$ є скінченною. Інакше кажучи, яке б відкрите покриття ми не взяли, будь-яке підпокриття буде складатися із скінченної кількості множин. Отже, простір $\left(X, 2^X\right)$, що складається із скінченної кількості точок, є компактним. ■

**Задача 6.3.** Доведіть, що простір Зариського є компактним.

*Розв'язок.* Носієм простору Зариського є незлічена множина $X$, а топологія складається із множин, доповнення яких є скінченними. Нехай $S = \{G_i, i \in I\}$ — довільне відкрите покриття множини $X$, що містить нескінченну кількість точок. Виберемо деяку множину $G_{i_0} \neq X$, тоді $F_{i_0} = X \setminus G_{i_0}$ містить скінченну кількість точок: $x_1, x_2, ..., x_n$. Інакше кажучи, множина $G_{i_0}$ містить майже всі точки множини $X$, за винятком точок $x_1, x_2, ..., x_n$. Виберемо в покритті $S$ множини $G_i$, що містять ці точки: $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, ..., x_n \in G_n$. Отже, сукупність $G_{i_0}, G_{i_1}, ..., G_{i_n}$ утворить покриття всього простору. Це означає, що простір Зариського є компактним. ■

**Задача 6.4.** Доведіть, що простір $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ не є компактним.

*Розв'язок.* Щоб довести, що простір $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ не є компактним, достатньо указати деяке відкрите покриття, із якого неможливо виділити скінченне підпокриття. Прикладом такого покриття є система $P = \left\{ S(0,n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2} < n \right\}, n \in \mathbb{N} \right\}$, яка складається із відкритих куль с центром в початку координат і радіусами, що дорівнюють $n$. Будь-яка скінченна підсистема $P_m = \{S_i(0,i), i = 1, ..., m\}$ сукупності $P$ не може бути покриттям простору, адже об'єднанням цих множин була б куля

$S_m(0,m)$. В цю кулю не потрапить жодна точка, відстань від якої до початку координат перевищує $m$. Отже, простори $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ не є компактними. ■

**Задача 6.5.** Доведіть, що для того, щоб множина $M \subset X$ була компактною необхідно і достатньо, щоб довільне відкрите в $X$ покриття множини $M$ містило скінченне підпокриття.

*Розв'язок. Необхідність.* Нехай $M$ — компактна підмножина простору $X$, а $S = \{G_i, i \in I\}$— його довільне відкрите покриття. Розглянемо слід $\tilde{S} = \{\tilde{G}_i = G_i \cap M, i \in I\}$ покриття $S$ на множині $M$. Цей слід також є відкритим в $M$ покриттям множини $M$. Оскільки, за припущенням, підпростір $(M, \tau_M)$ є компактним, то із відкритого покриття $\tilde{S}$ можна вибрати скінченне підпокриття $\{\tilde{G}_{i_1}, \tilde{G}_{i_2}, ..., \tilde{G}_{i_n}\}$. Зважаючи на те, що множини $\tilde{G}_{i_1}, \tilde{G}_{i_2}, ..., \tilde{G}_{i_n}$ є частинами множини $M$, доходимо висновку, що множина $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ також утворюють відкрите в покриття $X$ множини $M$.

*Достатність.* Нехай довільне відкрите покриття множини $M$ містить скінченне підпокриття, а $\tilde{T} = \{\tilde{V}_i, i \in I\}$ — довільне відкрите в $M$ покриття простору $(M, \tau_M)$. Нехай $V_i$ є такою відкритою в $X$ множиною, що $V_i \cap M = \tilde{V}_i$. З цього випливає, що система $T = \{V_i, i \in I\}$ утворює покриття множини $M$ відкритими в $X$ множинами. За умовою, існує скінченне підпокриття $V_{i_1}, V_{i_2}, ..., V_{i_n}$ покриття $T$. Отже, система $\{\tilde{V}_{i_1}, \tilde{V}_{i_2}, ..., \tilde{V}_{i_n}\}$ є скінченним підпокриттям покриття $T$. Це означає, що простір $(M, \tau_M)$ є компактним. ■

**Задача 6.6.** Доведіть, що замкнений відрізок числової прямої $\mathbb{R}$ є компактним.

*Розв'язок.* Розглянемо довільне покриття $S = \{G_i, i \in I\}$ відрізка $[a,b]$, що складається із відкритих в $\mathbb{R}$ множин. Доведемо, що воно містить скінченне підпокриття. З цього випливатиме, що відрізок $[a,b]$ є компактною множиною (див. задачу 6.5). Умовимось називати точку $x_0 \in [a,b]$ *позначеною,* якщо існує скінченна підсистема системи $S$, яка покриває замкнений відрізок $[a, x_0]$. Оскільки точка $x = a$ є позначеною, то множина $M$ усіх позначених точок є непорожньою.

Покажемо, що точка $\eta = \sup M$ також є позначеною. Нехай $\eta \in G_{i_0}$. В такому випадку, оскільки множина $G_{i_0}$ є відкритою, існує точка $\xi \in M$, така що $a < \xi < \eta$ і відрізок $[\xi, \eta]$ цілком міститься в $G_{i_0}$. Оскільки $\xi$ — позначена точка, то існує скінченна система $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ системи $S$, що покриває відрізок $[a, \xi]$. Отже, система $G_{i_0}, G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ покриває відрізок $[a, \eta]$, тобто $\eta \in M$. Покажемо тепер, що $\eta = b$. Припустимо, що $\eta < b$. Тоді, оскільки множина $G_{i_0}$ є відкритою, існує таке число $\eta' \in (\eta, b)$ таке, що $[\eta, \eta'] \subset G_{i_0}$. Отже, підсистема $G_{i_0}, G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ є покриттям відрізку $[a, \eta']$, тобто $\eta' \in M$. Це суперечить тому, що $\eta = \sup M$. Отже, точка $b$ є позначеною, а значить, існує скінченна підсистема системи $S$, яка покриває замкнений відрізок $[a,b]$. ■

**Задача 6.7.** Доведіть, що замкнена підмножина компактного простору є компактною множиною.

*Розв’язок.* Нехай $M$ — замкнена підмножина компактного простору $X$, а $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ — довільна центрована система замкнених в $M$ множин. Оскільки $M$ є замкненою в $X$ множиною, то ця сукупність буде також центрованою системою замкнених в $X$ множин. Оскільки $X$ — компактний простір, то, за другим критерієм компактності, $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \varnothing$. Отже, $(M, \tau_M)$ — компактний простір (з тієї ж причини). ■

**Задача 6.8.** Доведіть, що компактна підмножина хаусдорфова простору є замкненою.

*Розв’язок.* Нехай $M$ — довільна компактна підмножина хаусдорфова простору $X$. Розглянемо довільну точку $x_0 \in X \setminus M$ (якщо $M = X$ або $M = \varnothing$, то доведення є тривіальним). Оскільки $X$ — хаусдорфів простір, то для кожної точки $x \in M$ існують окіл $U_x$ точки $x$ і окіл $V_x$ точки $x_0$, такі що $U_x \bigcap V_x = \varnothing$.

Очевидно, що система околів $\{U_x, x \in M\}$ утворює покриття компактної множини $M$ відкритими в $X$ множинами. Отже, (див. задачу 6.7) в цій системі існує скінченне підпокриття $\{U_{x_i}, i = 1, 2, ..., n\}$. Перетин $V_0 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ є околом точки $x_0$ і не перетинається с об’єднанням $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, а значить, він не перетинається із множиною $M$. Отже, у кожної точки $x_0$ існує окіл $V_0$, що не містить точок множини $M$, тобто $M = \overline{M}$. ■

**Задача 6.9.** Доведіть, що будь-який компакт є нормальним простором.

*Розв’язок.* Нехай топологічний простір $X$ — компакт, тобто є хаусдорфовим і компактним. Доведемо, що довільні непорожні диз’юнктні множини замкнені в $X$ множини $M$ і $N$ мають відкриті околи, що не перетинаються.

З одного боку, оскільки $M$ і $N$ — замкнені підмножини компактного простору, то внаслідок задачі 6.7 вони є компактними. З іншого боку, оскільки $X$ — хаусдорфів простір, то для довільної точки $x \in M$ і довільної точки $y \in N$ існують околи $O_x$ і $O_y$, що не перетинаються. Зафіксуємо деяку точку $y \in N$. Введемо множини $V_y = \bigcap_{y \in N} O_y$ і $U_y = \bigcup_{x \in M} O_x$ окіл об’єднаємо всі відповідні околи всіх точок множини $M$. Множина $U_y$ містить множину $M$ (оскільки вона є об’єднанням околів всіх точок множини $M$), а множина $V_y$ є околом точки $y \in N$ (оскільки вона є перетином всіх околів точки $y$). Отже, для довільної точки $y \in N$ існує відкрита множина $U_y$, що містить множину $M$, і відкритий окіл $V_y$, такі що $U_y \bigcap V_y = \varnothing$. Об’єднання околів $V_y$

всіх точок $y \in N$ утворює покриття множини $N$, тобто $\{V_y, y \in N\}$ — відкрите покриття множини $N$. Оскільки $N$ — компактна множина, то в покритті $\{V_y, y \in N\}$ існує скінченне підпокриття $\{V_{y_i}, i = 1, ..., n\}$ множини $N$. Покладемо

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}, V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

Оскільки всі множини $U_{y_i}$ і $V_{y_i}$ попарно не перетинаються, множини $U$ і $V$ є відкритими диз'юнктними множинами, що містять множини $M$ і $N$. Отже, простір $X$ — нормальний простір.■

**Задача 6.10 (перший критерій зліченної компактності).** *Доведіть, що для того щоб простір $(X, \tau)$ був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна його нескінченна підмножина має принаймні одну граничну точку.*

*Розв'язок. Необхідність.* Нехай $(X, \tau)$ — зліченно компактний простір, а $M$ — довільна нескінченна множина в $X$. Припустимо, усупереч твердженню, що $M$ не має жодної граничної точки (має, не значить містить!). Це означає, що в множині $M$ існує нескінченна послідовність різних точок $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, що не має граничних точок. Побудуємо скінченну систему підмножин $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, поклавши $F_n = \{x_n, x_{n+1}, ..., ...\}$. Із структури цих множин випливає, що будь-яка скінченна сукупність точок $F_n$ має непорожній перетин, всі множини $F_n$ є замкненими, але $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing.$

1). $\forall m \in \mathbb{N}$ $\bigcap_{n=1}^{m} F_n = F_m \neq \varnothing$.

2). Якщо припустити, що $F_n = \{x_n, x_{n+1}, ..., ...\}$ є не замкненою, то повинна існувати її точка дотику $x$, яка не належить $F_n$. В такому випадку в довільному околі цієї точки буде міститись хоча одна точка із $F_n$ і вона не буде співпадати з $x$. Отже, точка $x$ — гранична точка множини $F_n$, що суперечить припущенню про те, що послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ не має граничних точок.

3). Якщо припустити, що $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$, то має існувати точка $x_m$, яка належить всім множинам $F_n$. З іншого боку, за конструкцією множин $F_n$, точка $x_m$ не може належати множинам $F_n$ для $n > m$. Ця суперечність доводить, що $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing.$

Отже, ми побудували зліченну центровану систему замкнених множин, перетин яких порожній, що суперечить припущенню, що простір $(X, \tau)$ зліченно компактним.

*Достатність.* Нехай в просторі $(X, \tau)$ кожна нескінченна множина $M$ має граничну точку. Доведемо, що простір $(X, \tau)$ є зліченно компактним. Для цього достатньо перевірити, що будь-яка зліченна центрована система $\{F_n\}$ замкнених множин має непорожній перетин. Побудуємо множини $\hat{F}_m = \bigcap_{k=1}^{m} F_k$. Оскільки система $\{F_n\}$ є центрованою, то замкнені непорожні множини $\hat{F}_m$ утворюють послідовність

$\hat{F}_1, \hat{F}_2, ..., \hat{F}_m, ...$, що не зростає. Очевидно, що $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m$. Можливі два варіанти: серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, або нескінченна кількість таких множин. Розглянемо ці варіанти окремо.

1). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, то починаючи з деякого номера $m_0$ виконується умова $F_{m_0} = F_{m_0+1} = \dots$. Тоді твердження доведено, оскільки $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m = \hat{F}_{m_0} \neq \varnothing$.

2). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише нескінченна кількість попарно різних множин, то можна вважати, що $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1} \neq \varnothing$. Оберемо по одній точці з кожної множини $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1}$. Отже, ми побудували нескінченну множину різних точок, яка, за умовою, має граничну точку $x^*$. Всі точки $x_m, x_{m+1}, \dots$ належать множинам $\hat{F}_m$. Отже, $x^* \in \hat{F}_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. З цього випливає, що $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m \neq \varnothing$. ■

**Задача 6.11 (другий критерій зліченної компактності).** *Доведіть що для того щоб досяжний простір $(X, \tau)$ був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна нескінченна послідовність точок із $X$ має принаймні одну граничну точку.*

*Розв'язок. Необхідність.* Нехай $(X, \tau)$ — зліченно компактний простір, а $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність точок із $X$. Розглянемо два варіанти.

1). Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ містить нескінченну кількість різних точок, то множина $M = \{x_n, x_n \neq x_m\}$ є нескінченною. Із теореми 6.4 випливає, що існує точка $x^*$, яка є граничною. Оскільки простір $(X, \tau)$ є $T_1$-простором, то в довільному околі точки $x^*$ існує нескінченна кількість точок множини $M$. Це означає, що точка $x^*$ є граничною і для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2). Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ містить скінченну кількість різних точок, то існує стаціонарна послідовність $x_{n_k} = x^*$, $k = 1, 2, \dots$. Таким чином, точка $x^*$ э граничною точкою послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Отже, в обох випадках послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має граничну точку.

*Достатність.* Нехай кожна нескінченна послідовність точок має принаймні одну граничну точку. Припустимо, усупереч твердженню, що топологічний простір $(X, \tau)$ не є зліченно компактним. Із теореми 6.4 випливає, що в $X$ існує нескінченна множина $M$, що не має граничних точок. Виділимо в $M$ послідовність попарно різних точок. Ця послідовність також не має граничної точки (інакше її гранична точка була б граничною точкою множини $M$). Отримане протиріччя з припущенням доводить наше твердження. ■

**Задача 6.12.** *Для топологічного простору* $(X,\tau)$ *із зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності.*

*Розв’язок. Необхідність.* Нехай $(X,\tau)$ — компактний простір. Тоді із *довільного* відкритого покриття можна виділити скінченне покриття. Значить, скінченне покриття можна виділити і із зліченного відкритого покриття.

*Достатність.* Нехай $(X,\tau)$ є зліченно компактним простором, а $S=\{U_\alpha,\alpha\in A\}$ — його довільне відкрите покриття. Оскільки простори із зліченою базою мають властивість Ліндельофа (теорема 6.1), то покриття $S$ містить підпокриття $S'$, яке, внаслідок, зліченної компактності простору $(X,\tau)$ містить скінченне підпокриття $S''$. Отже, простір $(X,\tau)$ є зліченно компактним. ■

**Задача 6.13.** *Для досяжних просторів із зліченою базою компактність, зліченна і компактність і секвенційна компактність є еквівалентними.*

*Розв’язок.* $1\Leftrightarrow 2$. Для топологічного простору $(X,\tau)$ із зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності (задача 6.12).

$2\Leftrightarrow 3$. В класі досяжних просторів із секвенційної компактності випливає зліченна компактність. Крім того, оскільки простір має зліченну базу, то із зліченної компактності випливає секвенційна компактність. Дійсно, якщо $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — довільна нескінченна послідовність в $X$, то внаслідок зліченної компактності $X$ вона має граничну точку $x^*$. Розглянувши зліченну локальну базу $\{U_k(x^*)\}_{k=1}^{\infty}$, таку що $U_{k+1}(x)\subset U_k(x)$ (таку локальну базу можна утворити із будь-якої локальної бази $V_k(x)$, взявши як $U_k(x)=\bigcap_{n=1}^{k} V_n(x)$), можна взяти точки $x_{n_k}\in U_k\setminus U_{k+1}$ і утворити підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до $x^*$. Отже, простір $X$ є секвенційно компактним. ■