Урок 5. Аксіоми віддільності

Задача 5.1. Доведіть, що зв’язна двокрапка є колмогоровським, але недосяжним простором.

Розв’язок. Зв’язна двокрапка: $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\varnothing, X,\{b\}\}$.

$\forall a\neq b\,\exists\{b\}\in\tau: b\in\{b\}, a\in\{b\} \Rightarrow (X,\tau)$ - колмогоровський простір.

$\forall a\in X\ \nexists O(a)\in\tau, b\notin O(a) \Rightarrow (X,\tau)$ - не досяжний простір.

Коментар. Щоб простір був колмогоровським необхідно щоб для двох різних точок ми могли одну із них відокремити околом, тобто повинен існувати окіл, що містить одну точку, але не містить іншу. Для двох різних точок a і b в зв’язній двокрапці існує окіл $\{b\}$, що містить точку b, але не містить точку a. Отже, зв’язна двокрапка є колмогоровським простором. З іншого боку, точка a зовсім не має околів. Це означає, що зв’язна двокрапка досяжним простором бути не може. ■

Задача 5.2. Доведіть, що простір Зариського є досяжним, але не хаусдорфовим.

Розв’язок.

Простір Зариського: X – незлічена множина, $\tau=\{\varnothing, X, X\setminus\{x_1,x_2,...,x_n\}\}$.

$x_1\neq x_2 \Rightarrow O(x_1)=X\setminus\{x_i\neq x_1, i=1,...,n\}$, $O(x_2)=X\setminus\{x_i\neq x_2, i=1,...,n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists O(x_1)\in\tau: O(x_1)\bigcap\{x_2\}=\varnothing,\ \exists O(x_2)\in\tau: O(x_2)\bigcap\{x_1\}=\varnothing$.

?! $\exists x_1\neq x_2\ \ \forall O(x_1), O(x_2)\in\tau: O(x_1)\bigcap O(x_2)=\varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow X\setminus\left(O(x_1)\bigcap O(x_2)\right)=X \Rightarrow \left(X\setminus O(x_1)\right)\bigcup\left(X\setminus O(x_1)\right)=X \Rightarrow$

$\Rightarrow A\bigcup B=X, card\ A=n, card\ B=n, card\ X>\aleph_0$. **?!**

Коментар. Доведемо, що простір Зариського є досяжним, тобто для кожних двох різних точок x_1 та x_2 існують окіл $O(x_1)$, що не містить точки x_2, і окіл $O(x_2)$, що не містить точки x_1. За побудовою топології Зариського, околом точки x_1 є множина, що утворена викиданням із незліченої множини X скінченної кількості точок. Очевидно, що серед цих скінченних множин є множини, що містять точку x_2 і не містять точки x_1. Доповнення до однієї з них можна взяти як шуканий окіл $O(x_1)$, що не містить точки x_2. Так же само можна знайти шуканий окіл $O(x_2)$.

Доведення того, що простір Зариського не є хаусдорфовим, здійснюється від супротивного. Припустимо, що існують різні точки x_1 і x_2, довільні околи яких $O(x_1)$ і $O(x_2)$ не перетинаються: $O(x_1)\bigcap O(x_2)=\varnothing$. Отже, доповнення перетину цих околів співпадає з множиною X, тобто $X\setminus\left(O(x_1)\bigcap O(x_2)\right)=X$. За принципом двоїстості це означає, що об’єднання доповнень цих околів співпадає з усім простором X, тобто $\left(X\setminus O(x_1)\right)\bigcup\left(X\setminus O(x_1)\right)=X$. Оскільки топологія Зариського складається із доповнень скінченних множин, звідси випливає, що незліченна множина X складається із скінченної кількості точок. Отримане протиріччя доводить, що простір Зариського не є хаусдорфовим. ■

Задача 5.3 (критерій регулярності). Доведіть, що для того щоб T_1-простір (X,τ) був регулярним необхідно і достатньо, щоб довільний окіл U довільної точки x містив її замкнений окіл.

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір (X,τ) є регулярним, x — його довільна точка, а U — її довільний окіл. Покладемо $F = X \setminus U$. Тоді внаслідок регулярності простору (X,τ) існує окіл V точки x і окіл W множини F, такі що $V \cap W = \varnothing$. Звідси випливає, що $V \subset X \setminus W$, отже, $\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset X \setminus F = U$.

Достатність. Нехай довільний окіл довільної точки x містить замкнену множину, якій належить ця точка, а F — довільна замкнена множина, що не містить точку x. Покладемо $G = X \setminus F \in \tau$. Нехай V — замкнена множина, що містить точку x і міститься в множині G. Тоді $W = X \setminus V$ є околом множини F, який не перетинається з множиною V. ■

Задача 5.4. Розглянемо множину $X = \mathbb{R}$ і введемо топологію так: околами будь-яких ненульових точок будемо вважати околи цих точок в природній топології дійсної осі (відкриті інтервали та їх об’єднання), а околами нуля будемо вважати околи нуля в природній топології, із яких викинуті числа $\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots$. Доведіть, що побудований простір є хаусдорфовим, але не є регулярним.

Розв’язок. Множина $A = \left\{ \frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots \right\}$ є замкненою, точка нуль їй не належить, але будь-які околи точки нуль і довільні околи множини A перетинаються.

Коментар. ■

Задача 5.5. Доведіть, що для того щоб система $\gamma = \{A_i, i \in I\}$ замкнених множин із X була замкненою базою в X, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки $x_0 \in X$ і для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існувала множина $A_{j_0} \in \gamma$ така, що $x_0 \notin A_{j_0} \supset F_0$.

Розв’язок. Необхідність. Нехай $\gamma = \{A_i, i \in I\}$ – замкнена база в X. Це означає, що будь-яку замкнену множину можна подати у вигляді перетину елементів системи γ. Розглядаючи доповнення до цих множин, бачимо, що будь-яку відкриту множину можна подати у вигляді об’єднання доповнень до елементів замкненої бази. Інакше кажучи, доповнення до елементів замкненої бази утворюють відкриту базу. За властивостями відкритої бази, в довільному околі U точки x_0 існує елемент бази V, такий що $x_0 \subset V \subset U$. Розглянемо доповнення $X \setminus V$ і $X \setminus U$. Оскільки $V \subset U$, то $X \setminus U \subset X \setminus V$. Отже, поклавши $F_0 = X \setminus U$ і $A_{j_0} = X \setminus V$, ми доводимо необхідність.

Достатність. Припустимо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існує множина $A_{j_0} \in \gamma$ така, що $x_0 \notin A_{j_0} \supset F_0$. Розглянемо доповнення $X \setminus A_{j_0}$ і $X \setminus F_0$. Відносно цих множин виконується включення $X \setminus A_{j_0} \subset X \setminus F_0$, до того ж $x_0 \in X \setminus F_0$. Отже, оскільки замкнена множина F_0, що не містить точку x_0 є довільною, то для кожної точки $x_0 \in X$ і відкритого околу цієї точки $U = X \setminus F_0$ існує відкрита множина $V = X \setminus A_{j_0}$, така що виконується умова $x_0 \in V \subset U$. Значить, множини $\beta = \{X \setminus \gamma_i\}$ утворюють відкриту базу, тобто множина $\gamma = \{A_i, i \in I\}$ є замкненою базою. ■

Задача 5.5. Доведіть, що для того щоб система $\delta = \{B_j,\ j \in J\}$ замкнених множин із X була замкненою передбазою в X, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки $x_0 \in X$ і для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існував скінченний набір елементів $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_n}$ такий, що $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k} \supset F_0$.

Розв’язок. Необхідність. Нехай система $\delta = \{B_j,\ j \in J\}$ замкнених множин із X є замкненою передбазою в X. Це означає, що будь-яку замкнену в X множину можна подати у вигляді перетину скінченних об’єднань множин із системи δ. Розглядаючи доповнення до цих множин, бачимо, що довільну відкриту множину можна подати у вигляді об’єднання скінченного перетину множин, що є доповненнями до елементів системи δ, тобто відкритими. Інакше кажучи, доповнення до елементів системи δ утворюють відкриту передбазу. За властивостями відкритої передбази скінченні об’єднання її елементів утворюють базу. Отже, доповнення до її елементів утворює замкнену базу. Таким чином, зважаючи на результат, отриманий в задачі 5.5, доходимо висновку, що для кожної замкненої множини F_0, яка не містить точку x_0, існує скінченний набір елементів $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_n}$ такий, що $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k} \supset F_0$.

Достатність. Припустимо, що для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існує скінченний набір елементів $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_n}$ такий, що $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k} \supset F_0$. Це означає, що множини $\bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k}$ утворюють замкнену базу. Отже, множина $\delta = \{B_j,\ j \in J\}$ є замкненою передбазою. ■

Задача 5.6 (критерій цілковитої регулярності). Для того щоб (X, τ) був цілком регулярним (тихоновським) необхідно і достатньо, щоб кожна його точка x_0 була функціонально віддільною від усіх множин із деякої замкненої передбази $\delta = \{F_i, i \in I\}$, що її не містять.

Розв’язок. Необхідність. Якщо простір (X, τ) є цілком регулярним (тихоновським), то точка x_0 є функціонально віддільною від *усіх* замкнених множин, що її не містять, а значить, і від усіх множин із деякої замкненої передбази $\delta = \{F_i, i \in I\}$, що її не містять.

Достатність. Нехай F_0 — довільна замкнена в X множина, що не містить точку x_0, і нехай $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ — скінченний набір елементів із δ такий, що $x_0 \notin \overline{F} = \bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k} \supset F_0$ (за лемою 5.2). За припущенням, існує неперервна функція $f_k : X \to [0,1]$, яка здійснює функціональну віддільність точки x_0 і замкненої множини F_{i_k}. Покладемо $f(x)=\sup_k f_k(x)$ і покажемо, що функція f здійснює функціональну віддільність точки x_0 і множини F, а тим більше, точки x_0 і множини $F_0 \subset F$.

Дійсно, $f(x_0)=\sup_k f_k(x_0)=0$. Далі, оскільки $\forall k=1,\dots,n$ $f_k(x)\le 1$, із $x\in F$ випливає, що $f(x)=\sup_k f_k(x)=1$. Крім того, із того що $x\in F=\bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k}$ випливає, що $x\in F_{i_m}$, $1\le m\le n$, тобто $f_m(x)=1$.

Залишилося показати неперервність побудованої функції. Для цього треба довести, що $\forall x'\in X$ і $\forall \varepsilon>0$ $\exists U\in\tau,\ x'\in U:$ $\forall x\in U$ $\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon$. Оскільки f_k — неперервна функція, то існує окіл U_k точки x', такий що $\forall x\in U_k$ $\left|f_k(x)-f_k(x')\right|<\varepsilon$. Покладемо $U=\bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Тоді для кожного $x\in U$ і $\forall k=1,\dots,n$ виконуються нерівності

$$f_k(x')-\varepsilon<f_k(x)\le\sup_k f_k(x)=f(x),$$

$$f_k(x)<f_k(x')+\varepsilon\le\sup_k f_k(x')+\varepsilon=f(x')+\varepsilon.$$

Звідси випливає, що $f(x')-\varepsilon<f(x)<f(x')+\varepsilon$. ■

Задача 5.7 (мала лема Урисона - критерій нормальності). Досяжний простір X є нормальним тоді і лише тоді, коли для кожної замкненої підмножини $F\subset X$ і відкритої множини U, що її містить, існує такий відкритий окіл V множини F, що $\bar V\subset U$, тобто коли кожна замкнена підмножина має замкнену локальну базу.

Розв'язок. Необхідність. Нехай простір X є нормальним. Розглянемо замкнену множину F та її окіл U. Покладемо $F'=X\setminus U$. Оскільки $F\cap F'=\varnothing$, то існує відкритий окіл V множини F і відкритий окіл V' множини F', такі що $V\cap V'=\varnothing$. Отже, $V\subset X\setminus V'$. З цього випливає, що $\bar V\subset\overline{X\setminus V'}=X\setminus V'\subset X\setminus F'=U$.

Достатність. Нехай умови леми виконані, а множини F і F' — довільні замкнені підмножини простору X, що не перетинаються. Покладемо $U=X\setminus F'$. Тоді, оскільки множина U є відкритим околом множини F, то за умовою леми, існує окіл V множини F, такий що $\bar V\subset U$. Покладаючи $V'=X\setminus\bar V$ безпосередньо переконуємося, що множини V і V' не перетинаються і є околами множини F і F'. ■

Задача 5.8 (велика лема Урисона). Будь-які непорожні диз'юнктні замкнені підмножини нормального простору є функціонально віддільними.

Для самостійної роботи.