Урок 4. Неперервність

Задача 4.1 (критерії неперервності). Нехай (X,τ_X) і (Y,τ_Y) — топологічні простори і f — відображення X в Y. Наступні твердження є еквівалентними.

1). Відображення f є неперервним.

2). Прообраз будь-якого елемента передбази P в Y є відкритим в X.

3). Прообраз будь-якого елемента бази B в Y є відкритим в X.

4). Існують системи околів $\{B(x)\}_{x\in X}$ в X і $\{D(y)\}_{y\in Y}$ в Y, такі, що для кожного $x\in X$ і кожного $V\in D(f(x))$ знайдеться $U\in B(x)$, таке, що $f(U)\subset V$.

5). Прообраз будь-якої замкненої підмножини простору Y є замкнутим в X.

6). Для будь-якої підмножини $A\subset X$ маємо $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

7). Для будь-якої підмножини $B\subset Y$ маємо $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

8). Для будь-якої підмножини $B\subset Y$ маємо $f^{-1}(Int\ B)\subset Int\ f^{-1}(B)$.

Передбаза топологічного простору (X, τ) — це сукупність відкритих множин $P=\{U_k\in\tau, k\in K\}$, така що сімейство усіх скінчених перетинів $\bigcap_{k=1}^{n}U_k$, $k = 1, 2, ..., n$ є базою простору (X, τ).

Будь-яка база простору є його передбазою.

Приклад. Нехай $I=[0,1]$, $\tau_I=\{I\cap U, U\subset R, U\in\tau\}$, де τ — природна топологія числової прямої R. Тоді (I,τ_I) — топологічний простір. Сімейство усіх інтервалів виду $(r_1,r_2),[0,r_2)$ и $(r_1,1]$, де $r_1,r_2\in Q$ (тобто раціональні числа), є базою простору (I,τ_I), а усі інтервали виду $[0,r_2),(r_1,1]$ — його передбазою.

Розв'язок.

$1\Rightarrow 2.$

$P=\{U_k\in\tau, k\in K\}$ — передбаза простору (Y,τ_Y) $\Rightarrow U_k\in\tau$

$f\in C(X,Y)$, $U_k\in\tau\Rightarrow f^{-1}(U_k)\in\tau_X$.

Коментар. Передбаза складається із відкритих множин. За першим критерієм неперервності прообраз відкритої множини при неперервному відображенні є відкритою множиною. Отже, прообраз будь-якого елемента передбази P в Y є відкритим в X.

$2\Rightarrow 3.$

$P=\{U_k\in\tau, k\in K\}$ — передбаза $Y\Rightarrow\exists B=\left\{\bigcap_{k=1}^{n}U_k, n\in N, U_k\in P\right\}$ – база Y.

$$f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n}U_k\right)=\bigcap_{k=1}^{n}f^{-1}(U_k),\ U_k\in P\Rightarrow f^{-1}(U_k)\in\tau\Rightarrow\bigcap_{k=1}^{n}f^{-1}(U_k)\in\tau.$$

Коментар. База складається із скінчених перетинів елементів передбази, які є відкритими. За умовою 2), прообраз елемента бази є відкритим. Крім того, прообраз скінченого перетину множин є скінченим перетином прообразів цих відкритих множин. Отже, отримуємо, що прообраз елемента бази є прообразом скінченого перетину відкритих множин, тобто, прообразом скінченого перетину прообразів цих відкритих множин, який за третьою аксіомою Олександрова є відкритою множиною.

$3 \Rightarrow 4.$

$\forall V \in D\left(f\left(x\right)\right)\ \exists W \in B : f\left(x\right) \in W \subset V$, де B — база в $Y \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}\left(W\right) \in \tau_X,\ x \in f^{-1}\left(W\right) \Rightarrow \exists U \in B\left(x\right) : U \subset f^{-1}\left(W\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(U\right) \subset ff^{-1}\left(W\right) \subset W \subset V$.

Коментар. В довільному околі $V \in D\left(f\left(x\right)\right)$ знайдеться множина W із бази B простору *Y*, якій належить образ точки *x*. За умовою 3) це означає, що її прообраз $f^{-1}\left(W\right)$ є відкритою множиною в *X*. Значить, для довільної точки *x* із $f^{-1}\left(W\right)$ існує відкрита множина U із системи $B\left(x\right)$, що міститься в $f^{-1}\left(W\right)$. Зважаючи на монотонність будь-якого відображення, отримуємо, що $f\left(U\right) \subset ff^{-1}\left(W\right) \subset W \subset V$.

$4 \Rightarrow 5.$

$B = \overline{B} \subset Y \Rightarrow f^{-1}\left(B\right) = f^{-1}\left(Y \setminus Y \setminus B\right) = X \setminus f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$.

$\forall x \in f^{-1}\left(Y \setminus B\right) \exists U\left(x\right) : U \subset f^{-1}\left(Y \setminus B\right)?$

$x \in f^{-1}\left(Y \setminus B\right) \Rightarrow f\left(x\right) \in Y \setminus B \in \tau_Y \Rightarrow \exists V \in D\left(f\left(x\right)\right) : V \subset Y \setminus B \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists U \in B\left(x\right) : f\left(U\right) \subset V \Rightarrow x \in U \subset f^{-1}f\left(U\right) \subset f^{-1}\left(V\right) \subset f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$.

Коментар. Нехай *B* — замкнена множина в *Y*. Оскільки $f^{-1}\left(B\right) = X \setminus f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$, достатньо показати, що множина $f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$ є відкритою в *X*. Для цього покажемо, що будь-яка точка цієї множини є внутрішньою. Візьмемо довільну точку $x \in f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$. Її образ належить множині $Y \setminus B$, яка є відкритою в *Y* (оскільки вона є доповненням до замкненої множини *B*). Отже, існує такий окіл $\exists V \in D\left(f\left(x\right)\right)$, що міститься в множині $Y \setminus B$. За умовою 4) знайдеться множина $U \in B\left(x\right)$, образ якої міститься в множині V. Застосувавши до $f\left(U\right)$ обернене відображення f^{-1}, доходимо висновку, що $x \in U \subset f^{-1}f\left(U\right) \subset f^{-1}\left(V\right) \subset f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$. Зауважте, що тут використано універсальне включення: $\forall A \subset X\ \ A \subset f^{-1}f\left(A\right)$.

$5 \Rightarrow 6.$

$\overline{f\left(A\right)} \in Y \setminus \tau_Y \Rightarrow f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \in X \setminus \tau_X,\ A \subset f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A} \subset \overline{f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right)} = f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \Rightarrow f\left(\overline{A}\right) \subset ff^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \subset \overline{f\left(A\right)}$.

$6 \Rightarrow 7.$

$A \triangleq f^{-1}\left(B\right) \Rightarrow f\left(\overline{A}\right) = f\left(\overline{f^{-1}\left(B\right)}\right) \subset \overline{ff^{-1}\left(B\right)} \subset \overline{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}\left(B\right)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

$7 \Rightarrow 8.$

Застосуємо 7) до $Y \setminus B$.

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(Y \setminus B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(Int\ B) = f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} =$$

$$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = Int\ f^{-1}(B).$$

$8 \Rightarrow 1$

$U \in \tau \Rightarrow U = Int\,U \Rightarrow f^{-1}(U) \subset Int\ f^{-1}(U),\ Int\ f^{-1}(U) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(U) = Int\ f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_X$. ■