Урок 3. Збіжність

Задача 3.1. Нехай $x_n \to x$ при $n \to \infty$ і $x_n \in M$. Доведіть, що $x \in \bar{M}$.

Розв’язок.

$$x_n \to x \Rightarrow \forall O(x) \in \tau \; \exists N > 0 : \forall n \geq N \; x_n \in O(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau \; O(x) \cap \{x_1, x_2, ...\} \neq \varnothing, \; x_n \in M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau \; O(x) \cap M \neq \varnothing \Rightarrow x \in \bar{M} .$$

Коментар. Оскільки x є границею послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то за означенням для довільного околу $O(x)$ точки x існує таке натуральне число N, що для всіх чисел $n \geq N$ елементи x_n лежать в околі $O(x)$. Отже, перетин довільного околу $O(x)$ з послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є непорожнім. Оскільки $x_n \in M$, з цього випливає, що перетин довільного околу $O(x)$ з множиною M є непорожньою множиною, тобто точка x є точкою дотику множини M . ■

Задача 3.2. Чи вірно, що для довільної точки $x \in M$ знайдеться така послідовність $x_n \in M$, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$?

Розв’язок. Такою послідовністю є стаціонарна послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тобто послідовність, всі елементи якого, починаючи з деякого номера дорівнюють x: $\exists N > 0 : \; x_n = x \;\; \forall n \geq N$.■

Задача 3.3. Наведіть приклад простору (X, τ), в якому деяка точка x є граничною для множини $X \setminus \{x\}$ і жодна послідовність з $X \setminus \{x\}$ не збігається до x .

Розв’язок. Нехай X — довільна незліченна множина. Задамо в просторі X топологію, оголосивши відкритими порожню множину і всі підмножини, які утворені із X викиданням не більш ніж зліченної кількості точок.

$$\tau = \left\{ \varnothing, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{n,} ...\} \right\} .$$

Спочатку покажемо, що в цьому просторі збіжними є лише стаціонарні послідовності. Припустимо, що в просторі існує нестаціонарна послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що збігається до x . Тоді, взявши в якості околу точки x множину U, яка утворюється викиданням із X всіх членів послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, які відрізняються від точки x (якщо ця точка належить послідовності), ми дійдемо до протиріччя з тим, що окіл U мусить містити всі точки послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, починаючи з деякого номера. Якщо точка x не належить цій послідовності, то послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ буде вилучена повністю. Отже, в цьому випадку існує окіл U точки x, який не містить жодного елементу x_n, тобто послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не збігається до x .

На другому етапі доведення розглянемо підмножину $X \setminus \{x\}$, що утворюється шляхом видалення із X однієї точки x. Очевидно, точка x є граничною точкою множини *X*. Справді, якщо U — довільний відкритий окіл точки x, то за означенням відкритих в *X* множин, доповнення $X \setminus U$ є не більш ніж зліченим.

$U \in \tau \Rightarrow U = X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \setminus U = X \setminus X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \setminus U \neq \varnothing$ (оскільки card $A = c$).

Отже, доповнення $X \setminus U$ не може містити незлічену множину *X*, а значить, в околі точки x міститься незліченна множина точок простору *X*, а значить, точка x є граничною точкою множини *X*. З іншого боку, оскільки в просторі *X* збіжними є лише стаціонарні послідовності, то із $x \notin A$ випливає, що жодна послідовність точок із множини *X* не може збігатися до точки x. ■

Задача 3.4. Наведіть приклад множини з двома різними топологіями, в яких збігаються класи збіжних послідовностей, що містять нескінченну кількість різних точок.

Розв’язок. Класи збіжних послідовностей збігаються. коли будь-яка послідовність, яка збігається в топологічному просторі (X, τ_1) збігається і в (X, τ_2) до тієї ж точки, і навпаки.

Нехай першим простором є тривіальний топологічний простір $(X, \{0, X\})$, а другим — простір Зариського $(X, \{\varnothing, X, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}\})$. Як в тривіальному просторі, так і просторі Зариського будь-яка послідовність, що містять нескінченну кількість різних точок, є збіжною і збігається до всіх точок простору, тобто класи збіжних послідовностей збігаються. ■

Задача 3.5. Нехай $X = (0,1]$, а топологія τ визначається множинами $\varnothing$, X і усіма можливими інтервалами (a,b), де $a,b \in (0,1)$, а також їх довільними об’єднаннями. Знайдіть границю послідовності $x_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots$.

Розв’язок. Околами будь-якої точки $x_0 \in (0,1]$ є інтервали (a_α, b_α), де $\alpha \in A$, та їх об’єднання $O(x) = \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha)$, що містять точку x_0.

1) $\forall x_0 \in (0,1) \, \forall O(x) = \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha) \; \text{або} \; O(x) = (a,b)$

$$\exists N = \left[\frac{1}{\inf_\alpha \{a_\alpha\}} \right] \text{або } N = \left[\frac{1}{a} \right] : x_n < \inf_\alpha \{a_\alpha\} \text{ або } x_n < a \; \forall n \geq N \;\; \Rightarrow \; x_0 \neq \lim_{n \to \infty} x_n .$$

2) $\forall a,b \in (0,1) \;\; 1 \notin (a,b), 1 \neq \bigcup_{a,b} (a,b)$, але $1 \in X$, $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \in (0,1] = X \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1.$

Коментар. Розглянемо довільну точку $x_0 \in (0,1)$. Її довільним околом є або окремий інтервал або об’єднання інтервалів, що містить точку x_0. Якщо околом є окремий інтервал (a,b), то для всіх номерів $n \geq \left[\frac{1}{a} \right]$ всі числа x_n менше a, тобто не належать околу (a,b). Якщо ж околом є об’єднання інтервалів $\bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha)$, то для всіх номерів $n > \left[\frac{1}{\inf\limits_{\alpha} \{a_\alpha\}} \right]$ виконується нерівність $x_n < \inf\limits_{\alpha} \{a_\alpha\}$, тобто числа x_n не належать околу. Отже, жодна точка $x_0 \in (0,1)$ не може бути границею послідовності $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, тому що довільний її окіл містить лише скінченну кількість елементів цієї послідовності.

Точки $x_0 = 1$ не належить жодному околу виду (a,b), де $a,b \in (0,1)$ або їх об’єднанню. Отже, в топології існує єдиний окіл, що містить точку $x_0 = 1$, а саме множина-носій $(0,1]$. Цей напівінтервал містить всі елементи послідовності, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$. ■

Задача 3.6. Нехай $X = (0,1]$, а топологія τ визначається множинами $\varnothing$, X, інтервалами $(0,a)$, де $a,b \in (0,1)$, та множинами $(0,a) \cup \{1\}$. Доведіть, що в просторі (X,τ) послідовність $x_n = \frac{n-1}{n}, n = 1,2,...$ не має границі.

Розв’язок.

1). $\forall x_0 \in (0,1)\, \forall O(x) = (0,a)$ *або* $O(x) = (0,a) \cup \{1\}$ $\exists N = \left[\frac{1}{1-a} \right] : x_n > a\ \forall n \geq N \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}$.

2). $\forall a \in (0,1) \exists N = \left[\frac{1}{1-a} \right] : x_n > a\ \ \forall n \geq N \Rightarrow 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}$.

Коментар. Як і в попередній задачі, жодна точка інтервалу $(0,1)$ не може бути границею послідовності $x_n = \frac{n-1}{n}, n = 1,2,...$ оскільки її довільний окіл має вигляд $(0,a)$ або $(0,a) \cup \{1\}$ і містить лише скінченну кількість елементів цієї послідовності.

Крім того, околами точки $x = 1$ є об’єднання та сам напівінтервал $X = (0,1]$. Щоб точка $x = 1$ була границею послідовності необхідно, щоб її *довільний* окіл містив всі елементи послідовності, починаючи з деякого номера. Відносно множини ця умова виконується. Але об’єднання $(0,a) \cup \{1\}$ побудовано так, що воно містить лише скінченну кількість елементів послідовності $x_n = \frac{n-1}{n}, n = 1,2,...$ (решта розташована між точкою a та 1). Таким чином, послідовність не має жодної границі в даному просторі. ■

Задача 3.7. Доведіть, що в топологічному просторі з тривіальною топологією кожна послідовність є збіжною до довільної точки простору.

Розв'язок. Тривіальна топологія має вигляд $\{\varnothing, X\}$. Отже, для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ довільний окіл (в даному випадку — множина-носій X) довільної точки x містить всі елементи послідовності, тобто $\forall x, x_n \in X\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ■

Задача 6.8. Нехай X — довільна нескінченна множина, а τ — топологія Зариського на X. Доведіть, що в (X, τ) кожна послідовність, яка містить нескінченну кількість різних точок, збігається до довільної точки множини X.

Розв'язок. Топологія Зариського має вигляд $\{\varnothing, X, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}\}$. Якщо послідовність містить нескінченну кількість різних точок, то вона не може цілком міститись в жодній скінченній множині. Отже, починаючи з деякого номеру, вона міститься в доповненні до скінченної множини, тобто у відкритій множині із топології $\{\varnothing, X, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}\}$. З іншого боку, ця довільна множина є околом будь-якої своєї точки. Таким чином, в топології Зариського будь-яка послідовність, що містить нескінченну кількість різних точок, збігається до всіх точок множини X. ■

Задача 3.9. Якій умові має задовольняти топологія, щоб єдиність границі збіжної послідовності мала місце?

Розв'язок. Для того щоб будь-яка збіжна послідовність мала єдину границю, ми повинні вимагати, щоб ця послідовність містилася в довільному околі границі, починаючи з деякого номера, і ця умова не виконувалась щодо околів іншої точки. Отже, необхідно, щоб для довільних різних точок x і y існували околи, що не перетинаються (такі простори називаються хаусдорфовими, або просторами T_2).■

Задача 3.10. *Якщо простір T має злічену базу (задовольняє другій аксіомі зліченності), він є сепарабельним.*

Доведення. Нехай $B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — деяка злічена база в просторі *T*. Утворимо злічену множину $M = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, вибравши по одній точці $a_n \in B_n$, і доведемо, що множина *M* є всюди щільною, тобто в довільному околі довільної точки простору *E* існує точка із множини *M*. Дійсно, нехай x_n — довільна точка із простору *T*, а U_0 — її довільний окіл. Оскільки $B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — база простору *T*, існує окіл U_{n_0}, що цілком міститься в околі U_0. Отже, точка $a_{n_0} \in U_{n_0}$ також належить околу *U*, тобто множина *M* є всюди щільною.

Задача 3.11. Доведіть, що сепарабельний простір не обов'язково має злічену базу.

Доведення. Нехай *X* — *незлічена* множина, на якому введено топологію Зариського, яка складається із порожньої множини $\varnothing$, *X* і всіх можливих підмножин *U* із простору *X*, доповнення до яких *X**U* є скінченними множинами (тобто утворені шляхом викидання із множини *X* всіх можливих скінченних множин.)

$$\tau = \{\varnothing, X, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}\}$$

Розглянемо довільну нескінченну підмножину *M* простору *X*. Її замикання є нескінченною і замкненою множиною.

$$card\ M = \infty,\ \bar{M} = M.$$

Це можливо лише тоді, коли $\bar{M} = X$. Оскільки це твердження розповсюджується на всі нескінченні підмножини, воно виконується і для будь-якої зліченої підмножини простору *X*. Отже, простір $T = (X, \tau)$ є сепарабельним.

Тепер доведемо, що простір *T* не може мати зліченої бази. Справді, припустимо, що існує $\beta = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — злічена база в просторі *T*, x_0 — довільна точка із множини *X*, а $A_0 = \bigcap_k B_{n_k}$ — перетин всіх елементів із бази β, що містять точку x_0. Доведемо, що $A_0 = \{x_0\}$. Для цього припустимо, що існує точка $y_0 \in A_0,\, y_0 \neq x_0$. Покладемо $V = X \setminus \{y_0\}$. Ця множина належить топології Зариського, тобто є відкритою. Звідси випливає, що існує множина $B_{n_0} \in \beta$, така що $x_0 \in B_{n_0} \subset V$. Це означає, що множина A_0, а значить, і точка y_0, належить множині *V*, що суперечить її означенню. Таким чином, $A_0 = \{x_0\}$. Розглянемо доповнення $X \setminus A_0 = \bigcup_k \left(X \setminus B_{n_k} \right)$ і зауважимо, що кожна підмножина $X \setminus B_{n_k}$ містить скінченну кількість точок (оскільки вона є замкненою в топології Зариського і відрізняється від множини *X*). Таким чином, множина $\bigcup_k \left(X \setminus B_k \right)$ є зліченною (права частина рівності), а множина $X \setminus A_0 = X \setminus \{x_0\}$ є незліченою (ліва частина рівності). Отримане протиріччя спростовує наше припущення.