Урок 2. Внутрішність множини, ніде не щільні і скрізь щільні множини, межа множини

Означення 2.1. *Нехай* X — *довільна множина. Відображення* $\mathrm{cl}\colon 2^X \to 2^X$ *називається* ***оператором замикання Куратовського на X****, якщо воно задовольняє наступні умови* (***аксіоми Куратовського****):*
K.1. $\mathrm{cl}(M \bigcup N) = \mathrm{cl}(M) \bigcup \mathrm{cl}(N)$ (аддитивність);
K.2. $M \subset \mathrm{cl}(M)$;
K.3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(M)) = \mathrm{cl}(M)$ (ідемпотентність);
K.4. $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$.

Означення 2.2. *Нехай* X — *довільна множина. Відображення* $\mathrm{cl}\colon 2^X \to 2^X$ *називається* ***оператором взяття внутрішності множини X****, якщо воно задовольняє наступні умови:*
K.1. $\mathrm{Int}(M \bigcap N) = \mathrm{Int}(M) \bigcap \mathrm{Int}(N)$ (аддитивність);
K.2. $\mathrm{Int}(M) \subset M$;
K.3. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M)) = \mathrm{Int}(M)$ (ідемпотентність);
K.4. $\mathrm{Int}(\varnothing) = \varnothing$.

Теорема. Множина топологічного простору є відкритою тоді і лише тоді, коли разом з кожною точкоювона містить і деякий її окіл.

Доведення. Необхідність. Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A \in \tau$. Візьмемо довільну точку $x \in A$. Оскільки $A \in \tau$, то околом точки x, що міститься в множині A, є сама множина A.

Достатність. Нехай $A \subset X$ і $\forall x \in A \, \exists O(x) \subset A$. Позначимо $E = \bigcup\limits_{x \in A} O(x)$. Тоді $E \in \tau$ як об’єднання відкритих множин і $E \subset A$. Покажемо, що $A \subset E$. Якщо $x \in A$, то x належить деякому околу $O(x) \in E$. Отже, $x \in E$. Таким чином, $A = E \in \tau$. □

Задача 2.1. Нехай (X,τ) – топологічний простір і $M \subseteq X$. Доведіть рівність

$$X \setminus IntM = \overline{X \setminus M}. \tag{2.1}$$

Розв’язок.

1). Покажемо, що $\forall M \subseteq X$

$$X \setminus IntM \subseteq \overline{X \setminus M}.$$

$x \in X \setminus IntM \;\Rightarrow\; x \in X, x \notin IntM \;\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in X, \forall O(x) \in \tau \;\; O(x) \bigcap (X \setminus M) \neq \varnothing \;\Rightarrow\; x \in \overline{X \setminus M}.$

2). Покажемо, що $\forall M \subseteq X$

$$\overline{X \setminus M} \subseteq X \setminus IntM.$$

$x \in \overline{X \setminus M} \;\Rightarrow\; \forall O(x) \in \tau \;\; O(x) \bigcap X \setminus M \neq \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau \;\; O(x) \not\subset Int\, M \Rightarrow x \in X \setminus IntM.$

Коментар. Доведення рівності зводиться до доведення двох протилежних включень.

1). Якщо точка x належить доповненню внутрішності множини M, то довільний окіл цієї точки перетинається з доповненням до множини M, адже інакше існував би окіл точки x, який не перетинався б з доповненням до множини M, а значить, цілком би лежав в множині M, тобто точка x була б внутрішньою, що суперечить умові. Отже, точка x є точкою дотику множини $X \setminus M$.

2). Якщо точка x належить множині $\overline{X \setminus M}$, то вона є точкою дотику множини $X \setminus M$. Це означає, що її довільний окіл перетинається з множиною $X \setminus M$. З цього випливає, що жодний окіл точки x не може належати внутрішності множини M, адже в цьому випадку він не перетинався би з множиною $X \setminus M$. ■

Зауваження. Якщо (X,τ) – топологічний простір і $B \subseteq A \subseteq X$, то

$$A \setminus Int\ B = \overline{A \setminus B}.$$

Задача 2.2. Нехай (X,τ) – топологічний простір і $M \subseteq X$. Доведіть рівність

$$X \setminus \overline{M} = Int(X \setminus M). \tag{2.2}$$

Розв'язок.

1). Покажемо, що $\forall M \subseteq X$

$$X \setminus \overline{M} \subseteq Int(X \setminus M).$$

$$x \in X \setminus \overline{M} \Rightarrow x \in X, x \notin \overline{M} \Rightarrow \exists O(x) \in \tau\ O(x) \cap M = \varnothing \Rightarrow x \in Int(X \setminus M).$$

2). Покажемо, що $\forall M \subseteq X$

$$Int(X \setminus M) \subseteq X \setminus \overline{M}.$$

$$x \in Int(X \setminus M) \Rightarrow \exists O(x) \in \tau\ O(x) \subset (X \setminus M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists O(x) : O(x) \cap M = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{M} \Rightarrow x \in X \setminus \overline{M}.$$

Коментар. Доведення рівності зводиться до доведення двох протилежних включень.

1). Якщо точка належить множині $X \setminus \overline{M}$, то вона не є точкою дотику. Отже, існує її окіл, що не перетинається з множиною M. З цього випливає, що множина x є внутрішньою точкою множини $X \setminus M$.

2). Якщо точка x є внутрішньою точкою множини $X \setminus M$, то існує її окіл, що цілком міститься в цій множині. Цей окіл не перетинається з множиною M, тобто точка x не є точкою дотику множини M. З цього випливає, що ця точка не належить замиканню множини M, тобто лежить в множині $X \setminus \overline{M}$. ■

Зауваження. Якщо (X,τ) – топологічний простір і $B \subseteq A \subseteq X$, то

$$A \setminus \overline{B} = Int(A \setminus B).$$

Задача 2.3. Нехай (X,τ) – топологічний простір і $M \subseteq X$. Доведіть, що 1) $IntM$ є найбільшою відкритою множиною, що міститься в множині M і 2) $IntM$ об'єднанням всіх відкритих підмножин множини M.

Розв'язок.

1). $A \in \tau, A \subset M \Rightarrow A = \bigcup\limits_{x \in A} O(x) \subset \bigcup\limits_{x \in M} O(x),\ O(x) \subset A \subset M, O(x) \in \tau \Rightarrow$

$\Rightarrow A \subset IntM.$

2). $IntM = \bigcup_{\alpha} G_\alpha, G_\alpha \in \tau, G_\alpha \subset M.$

2.1). $IntM \subseteq \bigcup_{\alpha} G_\alpha, G_\alpha \in \tau, G_\alpha \subset M.$

$x \in IntM \Rightarrow \exists O(x) \in \tau: O(x) \subset M \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in M} O(x).$

2.2). $\bigcup_{\alpha} G_\alpha \subseteq IntM, G_\alpha \in \tau, G_\alpha \subset M.$

$x \in \bigcup_{\alpha} G_\alpha \Rightarrow \exists G_\alpha \subset M, x \in G_\alpha \in \tau \Rightarrow x \in IntM.$ ■

Задача 2.4. Нехай (X, τ) – топологічний простір і $M \subseteq X$. Доведіть рівність

$$IntM = X \setminus \overline{X \setminus M}.$$

Розв’язок. Прямий спосіб (другий спосіб – див. задачу 2.1).

1). $\forall A \in (X, \tau)\ A \subset \overline{A} \Rightarrow X \setminus M \subset \overline{X \setminus M} \Rightarrow X \setminus \overline{X \setminus M} \subset X \setminus (X \setminus M) = M.$

$X \setminus \overline{X \setminus M} \in \tau,\ X \setminus \overline{X \setminus M} \subset M \Rightarrow X \setminus \overline{X \setminus M} \subset IntM.$

2). $\forall U \subset M, U \in \tau\ \ X \setminus M \subset X \setminus U = \overline{X \setminus U} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X \setminus M} \subset \overline{\overline{X \setminus U}} = \overline{X \setminus U} = X \setminus U \Rightarrow U \subset X \setminus \overline{X \setminus M}.$

$U \subset Int\ M \Rightarrow IntM \subset X \setminus \overline{X \setminus M}.$

Коментар. Доведення рівності зводиться до доведення двох протилежних включень.

1). Оскільки будь-яка множина міститься в своєму замиканні, то доповнення множини M міститься в множині $\overline{X \setminus M}$. За властивостями операції доповнення для множин $X \setminus \overline{X \setminus M}$ і $X \setminus (X \setminus M)$ мають місце обернені включення. Крім того, $X \setminus (X \setminus M) = M$. Оскільки множина $X \setminus \overline{X \setminus M}$ є доповненням до замикання, вона є відкритою множиною і міститься в множині M, а найбільшою відкритою множиною, що міститься в множині M є її внутрішність. Отже, $X \setminus \overline{X \setminus M} \in IntM$.

2). Розглянемо довільну відкриту множину U, що міститься в M. За властивостями операції доповнення множини M міститься в доповненні множини U. В свою чергу, доповнення множини U є замкненим, оскільки множина U є відкритою. Отже, доповнення множини U співпадає із своїм замиканням. Застосуємо до включення, що ми отримали, операцію замикання. З огляду на властивість монотонності замикання, замикання доповнення множини M міститься в замиканні замикання доповнення множини U. Внаслідок ідемпотентності операції замикання маємо, що замикання замикання доповнення множини U співпадає із замиканням доповнення множини U, що в свою чергу співпадає з доповненням множини U. Беручи доповнення до лівої і правої частин включення, отримуємо, що $U \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$. Тепер зважимо на те, що множина U є довільною і все, що вище доведено виконується і для множини $IntM$. Отже, $IntM \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$. ■

Задача 2.5. Доведіть, що множина A топологічного простору (X, τ) є скрізь щільною в X тоді і лише тоді, коли $A \cap U \neq \varnothing$ для довільної непорожньої відкритої множини в X множини U.

$$\overline{A} = X \Leftrightarrow \forall U \in \tau, U \neq \varnothing\ \ A \cap U \neq \varnothing.$$

Розв’язок. Необхідність.

$\overline{A}=X \Rightarrow \forall x\in X\ \forall O(x)\in\tau\ \ O(x)\cap A\neq\varnothing$

$\forall x\in U\ \ U\overset{\Delta}{=}O(x), U\neq\varnothing \Rightarrow\ A\cap U\neq\varnothing$

Достатність.

$\forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \ A\cap U\neq\varnothing \Rightarrow\ \forall x\in X\ \forall O(x)\in\tau\ \ O(x)\cap A\neq\varnothing \Rightarrow \overline{A}=X$.

Коментар. Необхідність. Припустимо, що множина A є скрізь щільною в X. Це означає, що її замикання співпадає з множиною X, тобто кожна точка множини X є точкою дотику множини A. За означенням точки дотику множини A, кожний її окіл перетинається з A. З іншого боку, будь-яка непорожня відкрита множина U є околом кожної своєї точки. Оскільки будь-яка точка множини X є точкою дотику множини A, то і точки множини U є точками дотику множини A, а значить, множина U є околом точок дотику множини A і, за означенням, повинна перетинатися з A.

Достатність. Припустимо, що довільна непорожня відкрита множина U перетинається з множиною A. Це означає, що яку б точку x з множини X ми не взяли б, будь-який її окіл (тобто відкрита множина, що містить точку x) перетинається з множиною A. З цього випливає, що всі точки x з множини X є точками дотику множини A. Отже, $\overline{A}=X$. ■

Задача 2.6. Доведіть, що множина A топологічного простору (X,τ) є ніде не щільною в X тоді і лише тоді, коли $Int\ \overline{A}=\varnothing$.

$$\forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \ U\setminus\overline{A}\neq\varnothing \Leftrightarrow Int\ \overline{A}=\varnothing.$$

Розв’язок. Необхідність.

$\forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \ U\cap\left(X\setminus\overline{A}\right)\neq\varnothing \Rightarrow \forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \exists x\in U: x\in X\setminus\overline{A}$.

?! $Int\overline{A}\neq\varnothing \Rightarrow \forall x\in Int\overline{A}\ \exists O(x)\in\tau: O(x)\subseteq\overline{A} \Rightarrow \forall y\in O(x)\ y\in\overline{A}$ **?!** $\Rightarrow$

$\Rightarrow Int\overline{A}=\varnothing.$

Достатність.

?! $\exists U\in\tau, U\neq\varnothing: U\setminus\overline{A}=\varnothing \Rightarrow U\subseteq Int\overline{A}, U\neq\varnothing$ **?!** $\Rightarrow Int\overline{A}\neq\varnothing$

Коментар. Необхідність. Припустимо, що множина A топологічного простору (X,τ) є ніде не щільною в X. За означенням, множина називається ніде не щільною, якщо вона не є щільною в довільній непорожній відкритій множині U, тобто в кожній непорожній відкритій множині є точка, яка не є точкою дотику множини A. Якщо внутрішність замикання ніде не щільної множини A була б непорожньою, то будь-яка точка цієї *відкритої* множини була б точкою дотику. Але за означенням в цій множині повинна міститись точка, яка *не є* точкою дотику множини A. Отже, якщо множина A є ніде не щільною, то внутрішність її замикання є порожньою.

І навпаки, нехай внутрішність замикання множини A є порожньою. Припустимо, що множина A все ж таки не є ніде не щільною, тобто в X існує непорожня відкрита множина U, кожна точка якої є точкою дотику множини A. Тоді точки множини U є внутрішніми точками множини A. Але за умовою внутрішність множини A є порожньою. ■

Задача 2.7. Доведіть, що множина A топологічного простору (X,τ) є ніде не щільною в X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита множина в X містить непорожню відкриту множину, в якій немає точок A.

$$Int\ \overline{A}=\varnothing \Leftrightarrow \forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \exists W\subset U, W\in\tau, W\neq\varnothing : A\bigcap W=\varnothing.$$

Розв'язок. Необхідність.

$Int\ \overline{A}=\varnothing, U\in\tau, U\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in U\setminus\overline{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V\in\tau, V\neq\varnothing, x\in V : A\bigcap V=\varnothing.$

$W\triangleq V\bigcap U \Rightarrow W\subset U,\ W\subset V \Rightarrow W\bigcap A=\varnothing.$

Достатність.

?! $\forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \exists V\subset U, V\in\tau, V\neq\varnothing : A\bigcap V=\varnothing$, $U\triangleq Int\ \overline{A}\neq\varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists W\subset Int\overline{A} : A\bigcap W=\varnothing \Rightarrow \forall x\in W\ x\in Int\overline{A}, x\in X\setminus Int\overline{A}$ **!?** $\Rightarrow Int\ \overline{A}=\varnothing.$

Коментар. Необхідність. Нехай множина A топологічного простору (X,τ) є ніде не щільною в X. Розглянемо довільну відкриту множину U в X. Із означення ніде не щільної множини випливає, що в множині U є точка x, яка не є точкою дотику множини A. Це означає, що існує окіл V точки x, що не перетинається з множиною A. Але із цього ще не випливає, що саме цей окіл міститься в множині U. Отже, утворимо множину W, що є перетином множин V і U. Оскільки ця множина V не перетинається з множиною A, то і W не перетинається з множиною A. Одночасно, множина W є підмножиною множини U. Таким чином, ми довели, що в довільній непорожній відкритій множині в X існує непорожня відкрита підмножина, що не містить точок множини A.

Достатність. Припустимо, що довільна непорожня відкрита множина в X містить непорожню відкриту множину, в якій немає точок A, але внутрішність замикання множини A не є порожньою. Оскільки внутрішність замикання є відкритою множиною, то за умовою в ній повинна міститись підмножина W, що не перетинається з A. Отже, довільна точка x множини W, з одного боку, належить внутрішності множини A, а з іншого, належить її доповненню. Отримано суперечність. Отже, внутрішність замикання множини A порожня. ■

Задача 2.8. Доведіть, що множина A в топологічному просторі (X,τ) є ніде не щільною в X тоді і лише тоді, коли доповнення її замикання скрізь щільне в X.

$$Int\ \overline{A}=\varnothing \Leftrightarrow \overline{X\setminus\overline{A}}=X.$$

Розв'язок. Необхідність. (Див. задачу 2.1).

$Int\ \overline{A}=\varnothing \Rightarrow \overline{X\setminus\overline{A}}=X\setminus Int\ \overline{A}=X.$

Достатність.

$X=\overline{X\setminus\overline{A}}=X\setminus Int\ \overline{A} \Rightarrow Int\ \overline{A}=\varnothing.$ ■

Задача 2.9. Доведіть, що відкрита множина $A\subseteq X$ є скрізь щільною тоді і лише тоді, коли $X\setminus A$ є ніде не щільною.

$$\overline{A}=X, A\in\tau \Leftrightarrow Int\left(\overline{X\setminus A}\right)=\varnothing.$$

Розв'язок. Необхідність.

$\overline{A}=X,\ A\in\tau \Rightarrow Int\left(\overline{X\setminus A}\right)=Int\left(X\setminus A\right)=Int\left(\overline{A}\setminus A\right)=\overline{A}\setminus\overline{A}=\varnothing.$

Достатність. (Див. задачу 2.2).

$Int\left(\overline{X\setminus A}\right)=\varnothing \Rightarrow Int\left(X\setminus A\right)=\varnothing$.

$X=X\setminus\varnothing=X\setminus Int\left(X\setminus A\right)=\overline{X\setminus X\setminus A}=\overline{A}.$

Коментар. Необхідність. Припустимо, що відкрита множина $A\subseteq X$ є скрізь щільною і розглянемо внутрішність замикання її доповнення, прагнучи довести, що вона порожня. Оскільки A — відкрита множина, то $X\setminus A$ — замкнена множина, отже, $X\setminus A=\overline{X\setminus A}$. Звідси випливає, що $Int\left(\overline{X\setminus A}\right)=Int\left(X\setminus A\right)$. З іншого боку, множина A є скрізь щільною, то $X=\overline{A}$. Отже, $Int\left(X\setminus A\right)=Int\left(\overline{A}\setminus A\right)$. Крім того, різниця між замкненою і відкритою множиною є відкритою. З цього випливає, що $Int\left(\overline{A}\setminus A\right)=\overline{A}\setminus\overline{A}=\varnothing.$

Достатність. Нехай множина $X\setminus A$ є ніде не щільною, тобто $Int\left(\overline{X\setminus A}\right)=\varnothing.$ Оскільки множина A є відкритою, то $X\setminus A$ є замкненою множиною і $\overline{X\setminus A}=X\setminus A.$ Отже, $Int\left(\overline{X\setminus A}\right)=Int\left(X\setminus A\right)=\varnothing$. Отже, множину X можна подати як $X=X\setminus Int\left(X\setminus A\right)$. За формулою (2.2) маємо, що $X\setminus Int\left(X\setminus A\right)=\overline{X\setminus X\setminus A}=\overline{A}.$

Розглянемо ще один спосіб розв’язку цієї задачі, що базується на використанні закону заперечення. Припустимо, що множина $X\setminus A$ не є ніде не щільною, тобто є щільною в деякій непорожній відкритій множині: $\exists U\in\tau : \overline{X\setminus A}\supset U$. Але множина $X\setminus A$ є замкненою, тобто $X\setminus A=\overline{X\setminus A}.$ Отже, $\exists U\in\tau : X\setminus A\supset U$. Таким чином, в X існує відкрита множина U, яка не перетинається з множиною $A.$ Тоді будь-яка точка множини U не буде точкою дотику множини A, що суперечить умові $\overline{A}=X$.

І навпаки, припустимо, що відкрита множина A не є скрізь щільною, тобто в X існує точка x, яка не є точкою дотику множини A. Тоді існує окіл U точки x, який не перетинається з множиною A, тобто цілком міститься в множині $Int\left(X\setminus A\right)$. Оскільки множина A є відкритою, множина $X\setminus A$ є замкненою, тобто $X\setminus A=\overline{X\setminus A}.$ таким чином, $Int\left(X\setminus A\right)=Int\left(\overline{X\setminus A}\right)\neq\varnothing.$ ■

Задача 2.10. Доведіть, що перетин скінченої кількості відкритих скрізь щільних в X множин є скрізь щільним.

$$G_\alpha\in\tau, \overline{G}_\alpha=X \Rightarrow \overline{\bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha}=X.$$

Розв’язок.

$A\in\tau,\ \overline{A}=X \Rightarrow \overline{X\setminus\overline{A}}=X$.

$A\in\tau,\ \overline{A}=X,\ B\in\tau,\ \overline{B}=X \overset{2.8}{\Leftrightarrow} \overline{X\setminus\left(\overline{A\cap B}\right)}=X$.

$\overline{A\cap B}\subset \bar A\cap \bar B \Rightarrow X\setminus\overline{A\cap B}\supset X\setminus\left(\bar A\cap\bar B\right) \Rightarrow$

$\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}\supset \overline{X\setminus\left(\bar A\cap\bar B\right)}=\overline{X\setminus\bar A\cup X\setminus\bar B}=\overline{X\setminus\bar A}\cup\overline{X\setminus\bar B}=X\cup X=X \Rightarrow\Rightarrow$

$\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}=X.$

Коментар. Щоб розв’язати задачу, зведемо скінчений перетин множин до послідовності попарних перетинів і розглянемо перетин двох відкритих і скрізь щільних множин. Для цього скористаємось задачею 2.8 і доведемо, що доповнення до перетину двох відкритих скрізь щільних множин A і B є ніде не щільним, тобто $\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}=X$. Для цього зауважимо, що $\overline{A\cap B}\subset\bar A\cap\bar B$ і з властивістю доповнення $X\setminus\overline{A\cap B}\supset X\setminus\left(\bar A\cap\bar B\right)$. Використовуючи властивості монотонності і аддитивності замикання доходимо висновку, що $\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}=X$. ■

Задача 2.11. Доведіть, рівність

$$Fr\,M=\bar M\setminus IntM=\left(\bar M\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right).$$

Розв’язок.

1). $Fr\,M=\bar M\setminus IntM$?

$X\setminus Fr\,M=X\setminus\left(\bar M\cap\overline{X\setminus M}\right)=$

$=X\setminus\bar M\cup X\setminus\overline{X\setminus M}=X\setminus\bar M\cup Int\,M$.

$Fr\,M=X\setminus\left(X\setminus\bar M\cup Int\,M\right)=X\setminus X\setminus\bar M\cap X\setminus Int\,M=$

$=\bar M\cap X\setminus Int\,M=\bar M\setminus Int\,M.$

2). $Fr\,M=\left(\bar M\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right)$?

$Fr\,M=\bar M\cap\overline{X\setminus M}=\bar M\cap\overline{X\setminus M}\cap X=$

$=\bar M\cap\overline{X\setminus M}\cap\left(M\cup\left(X\setminus M\right)\right)=$

$=\left[\left(\bar M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap M\right]\cup\left[\left(\bar M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap\left(X\setminus M\right)\right]=$

а) $M\subset\bar M \Rightarrow \left(\bar M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap M=M\cap\overline{X\setminus M},$

б) $X\setminus M\subset\overline{X\setminus M} \Rightarrow \left(\bar M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap\left(X\setminus M\right)=\bar M\cap X\setminus M.$

а), б) $\Rightarrow$ $Fr\,M=\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cup\left(\bar M\cap X\setminus M\right).$

в) $X\setminus\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)=\left(X\setminus M\right)\cup X\setminus\overline{X\setminus M} \Rightarrow$

$\Rightarrow M\cap\overline{X\setminus M}=\left(X\setminus M\right)\cap X\setminus Int\,M=M\setminus Int\,M.$

г) $\bar M\cap X\setminus M=\bar M\setminus M.$

в), г) $\Rightarrow$ $Fr\,M=\left(\bar M\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right).$

Коментар. Доведемо рівності за схемою 1 $\Leftrightarrow$ 2, 1 $\Leftrightarrow$ 3.

1). Розглянемо доповнення до межі: $X\setminus Fr\,M$. За означенням $Fr\,M=\bar M\cap\overline{X\setminus M}$. Отже, $X\setminus Fr\,M=X\setminus\left(\bar M\cap\overline{X\setminus M}\right)$. За принципом двоїстості,

$X \setminus \left(\bar{M} \cap \overline{X \setminus M} \right) = \left(X \setminus \bar{M} \right) \cup \left(X \setminus \overline{X \setminus M} \right)$. Зважаючи на формулу $Int\, M = X \setminus \overline{X \setminus M}$, отримаємо рівність $X \setminus Fr\, M = X \setminus \bar{M} \cup Int\, M$. Розглядаючи доповнення до цієї множини, доходимо висновку, що $Fr\, M = X \setminus \left(X \setminus \bar{M} \cup Int\, M \right)$. За принципом двоїстості це означає, що $Fr\, M = X \setminus X \setminus \bar{M} \cap X \setminus Int\, M$. Але $X \setminus X \setminus \bar{M} = \bar{M}$ і $\bar{M} \subset X$, отже, $Fr\, M = \bar{M} \cap X \setminus Int\, M = \bar{M} \setminus M$.

2). За означенням $Fr\, M = \bar{M} \cap \overline{X \setminus M}$. Застосуємо прийом $A \subset X \Rightarrow A = A \cap X$ і подамо X як об’єднання множин M і $X \setminus M$. Це дає нам змогу подати межу у такому вигляді: $Fr\, M = \bar{M} \cap \overline{X \setminus M} \cap \left(M \cup \left(X \setminus M \right) \right)$. Розкриваючи цей вираз за принципом двоїстості, отримаємо рівність

$$Fr\, M = \left[\left(\bar{M} \cap \overline{X \setminus M} \right) \cap M \right] \cup \left[\left(\bar{M} \cap \overline{X \setminus M} \right) \cap \left(X \setminus M \right) \right].$$

Тепер зважимо на те, що $M \subset \bar{M}$, отже $\bar{M} \cap M = M$ і $\left(\bar{M} \cap \overline{X \setminus M} \right) \cap M = M \cap \overline{X \setminus M}$. Крім того, $X \setminus M \subset \overline{X \setminus M}$, отже $\left(X \setminus M \right) \cap \overline{X \setminus M} = X \setminus M$. Таким чином, $Fr\, M = \left(M \cap \overline{X \setminus M} \right) \cup \left(\bar{M} \cap X \setminus M \right)$.

Щоб уточнити вигляд множини $M \cap \overline{X \setminus M}$, розглянемо її доповнення $X \setminus \left(M \cap \overline{X \setminus M} \right)$. За принципом двоїстості воно дорівнює $\left(X \setminus M \right) \cup X \setminus \overline{X \setminus M}$. За формулою $Int\, M = X \setminus \overline{X \setminus M}$ це означає, що $X \setminus \left(M \cap \overline{X \setminus M} \right) = \left(X \setminus M \right) \cup Int\, M$. Повертаючись до множини $M \cap \overline{X \setminus M}$, обчислимо ще одне доповнення і застосуємо принцип двоїстості: $X \setminus X \setminus \left(M \cap \overline{X \setminus M} \right) = \left(M \cap \overline{X \setminus M} \right) = \left[X \setminus \left(X \setminus M \right) \right] \cap \left(X \setminus Int\ \right) = M \cap \left(X \setminus Int\ \right)$. З огляду на те, що $M \subset X$, маємо, що $M \cap \overline{X \setminus M} = M \setminus Int\, M$.

Щоб уточнити вигляд множини $\bar{M} \cap X \setminus M$ візьмемо до уваги, що $\bar{M} \subset X$, отже, $\bar{M} \cap X \setminus M = \bar{M} \setminus M$.

Таким чином,

$$Fr\, M = \left(M \cap \overline{X \setminus M} \right) \cup \left(\bar{M} \cap X \setminus M \right) = \left(\bar{M} \setminus M \right) \cup \left(M \setminus Int\, M \right). \blacksquare$$

Задача 2.12. Нехай $\left(X, \tau \right)$ – топологічний простір. Доведіть, що множина M топологічного простору $\left(X, \tau \right)$ є відкритою тоді і лише тоді, коли $M \cap FrM = \varnothing$.

Розв’язок. Необхідність.

$M \in \tau \Rightarrow M = Int\, M \Rightarrow Fr\, M = \bar{M} \setminus M \Rightarrow M \cap Fr\, M = \varnothing$.

Достатність.

$M \cap Fr\, M = \varnothing \Rightarrow M \cap \left(\bar{M} \setminus Int\, M \right) = \varnothing \Rightarrow M \setminus Int\, M = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow M = Int\, M \Rightarrow M \in \tau$.

Коментар. Необхідність. Нехай множина M є відкритою. Тоді вона співпадає із своєю внутрішністю: $M = Int\, M$. Отже, у формулі $Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M \right) \cup \left(M \setminus Int\, M \right)$ зникає другий член і $Fr\, M = \bar{M} \setminus M$. Це значить, що множина $Fr\, M$ лежить в множині $X \setminus M$, тобто не перетинається з M: $M \cap Fr\, M = \varnothing$.

Достатність. Припустимо, що $M \cap Fr\, M = \varnothing$. Подамо межу за формулою $Fr\, M = \bar{M} \setminus Int\, M$. Тоді $M \cap \left(\bar{M} \setminus Int\, M\right) = \varnothing$. З включення $M \subset \bar{M}$ випливає, що $M \cap \left(\bar{M} \setminus Int\, M\right) = M \setminus Int\, M = \varnothing$. Це означає, що $M = Int\, M$, тобто є відкритою множиною. ■

Задача 2.13. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Доведіть, що множина M топологічного простору (X, τ) є замкненою тоді і лише тоді, коли $Fr\, M \subseteq M$.

Розв’язок. Необхідність.

$X \setminus M \in \tau \Rightarrow M = \bar{M} \Rightarrow Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M\right) \cup \left(M \setminus Int\, M\right) = M \setminus Int\, M \Rightarrow$

$\Rightarrow Fr\, M \subseteq M$.

Достатність.

$Fr\, M \subseteq M,\; Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M\right) \cup \left(M \setminus Int\, M\right) \Rightarrow Fr\, M = M \setminus Int\, M \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{M} \setminus M = \varnothing \Rightarrow M = \bar{M} \Rightarrow X \setminus M \in \tau$.

Коментар. Необхідність. Нехай множина M є замкненою. Тоді вона співпадає зі своїм замиканням $M = \bar{M}$. Зважаючи на формулу $Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M\right) \cup \left(M \setminus Int\, M\right)$, доходімо висновку, що $Fr\, M = M \setminus Int\, M$. З цього випливає, що $Fr\, M \subseteq M$.

Достатність. Нехай $Fr\, M \subseteq M$. Аналіз формули $Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M\right) \cup \left(M \setminus Int\, M\right)$ показує, що в такому випадку межа не може містити точок множини $\bar{M} \setminus M$, тобто $Fr\, M = M \setminus Int\, M$. Отже, $\bar{M} \setminus M = \varnothing$, звідки випливає, що $\bar{M} = M$, тобто $X \setminus M \in \tau$. ■