Урок 1. Топологічні структури. Відкриті і замкнені множини. Підпростори

Задача 1.1. Нехай $X = \{a,b\}$. Доведіть, що система множин $\tau = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ утворює топологічну структуру в множині X і назвіть замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a,b\}$.

Розв'язок. Перевіримо виконання аксіом топологічної структури.

1) $\varnothing, X \in \tau$.
2) Доведемо, що довільне об'єднання елементів τ належить τ. Розглянемо лише довільні об'єднання різних множин системи τ, оскільки варіанти, коли об'єднання складається з однієї й тієї ж множини є тривіальним випадком. Довільні об'єднання різних множин із τ можна класифікувати наступним чином.
   2.1. Якщо в об'єднання входить $\varnothing$, її можна відкинути і розглядати лише решту, оскільки $\forall A \quad \varnothing \bigcup A = A$.
   2.2. Решту об'єднань можна розділити на об'єднання, що містять X і такі, що не містять X.
      2.2.1. Об'єднання, що містять X, збігаються з X і тому належать τ.
      2.2.2. Об'єднання, що не містять X, збігаються з $\{b\}$ і тому належать системі τ.
3) Доведемо, що скінченні перетини множин із τ належать τ. Розділимо всі ці перетини на ті, що містять $\varnothing$ і ті, ще не містять цієї множини.
   3.1. Якщо перетин містить $\varnothing$, він дорівнює $\varnothing$, оскільки $\forall A \quad \varnothing \bigcap A = \varnothing$. Отже, він належить τ.
   3.2. Перетини, що не містять $\varnothing$, можна розділити на такі, що містять $\{b\}$ і такі, що не містять цієї множини.
      3.2.1. Перетини, що не містять ані $\varnothing$, ані $\{b\}$, дорівнюють X і належать системі τ.
      3.2.2. Перетини не містять ані $\varnothing$, ані X, дорівнюють $\{b\}$ і належать τ.

Отже, ми пересвідчились, що всі три аксіоми топологічної структури виконуються, тому множина τ є топологічною структурою.

Для того щоб знайти замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a,b\}$, треба розглянути доповнення до відкритих множин, тобто елементів топологічної структури: $X \setminus \varnothing = X, \quad X \setminus X = \varnothing, \quad X \setminus \{b\} = \{a\}$. Отже замкненими множинами є $\varnothing$, X, $\{a\}$.

Топологічна структура $\tau = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ називається *зв'язною двокрапкою*. ■

Задача 1.2. Нехай $X = \{a,b\}$. Доведіть, що система множин $\tau = \left\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a\} \bigcup \{b\}\right\}$ утворює топологічну структуру в множині X і назвіть замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a,b\}$.

Розв'язок. Перевіримо виконання аксіом топологічної структури.

1) $\varnothing, X \in \tau$.
2) Те, що довільне об'єднання елементів τ належить τ є очевидним фактом.
3) Доведемо, що скінченні перетини множин із τ належать τ. Розділимо всі ці перетини на ті, що містять $\varnothing$ і ті, ще не містять цієї множини.

3.1. Якщо перетин містить $\varnothing$, він дорівнює $\varnothing$, оскільки $\forall A \quad \varnothing \bigcap A = \varnothing$. Отже, він належить τ.

3.2. Перетини, що не містять $\varnothing$, можна розділити на такі, що містять X і такі, що не містять цієї множини.

3.2.1. Перетини, що не містять $\varnothing$, але містять X, дорівнюють $\{a\}$, $\{b\}$ або $\{a\} \bigcup \{b\}$.

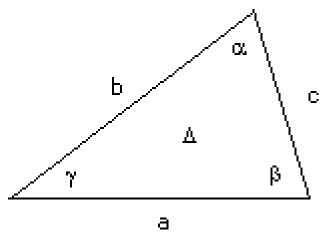
3.2.2. Перетини, що не містять ані $\varnothing$, ані X, являють собою перетини множин $\{a\}$, $\{b\}$ або $\{a\} \bigcup \{b\}$. Залежно від того, чи $a = b$ вони дорівнюють $\{a\}$ або $\{b\}$.

Отже, ми пересвідчились, що всі три аксіоми топологічної структури виконуються, тому множина τ є топологічною структурою.

Для того щоб знайти замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a,b\}$, треба розглянути доповнення до відкритих множин, тобто елементів топологічної структури: $X \setminus \varnothing = X \in \tau$, $X \setminus X = \varnothing \in \tau$, $X \setminus \{a\} = \{b\} \in \tau$, $X \setminus \{b\} = \{a\} \in \tau$, $X \setminus \left(\{a\} \bigcup \{b\}\right) =$ $X \setminus \{a\} \bigcap X \setminus \{b\}$= $\{a\} \bigcap \{b\} \in \tau$. Отже, замкненими множинами є $\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a\} \bigcup \{b\}$. Топологічна структура $\tau = \left\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a\} \bigcup \{b\}\right\}$ називається *простою двокрапкою*. Як бачимо, вона складається із множин, які одночасно є і відкритими, і замкненими. ■

Задача 1.3. (Топологія трикутника.) Розглянемо множину $X = \left\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \Delta\right\}$ і топологічну структуру $\tau = \left\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, \bigcup_{i \in \{1,\ldots,9\}} X_i\right\}$, де $X_1 = \varnothing$, $X_2 = X$, $X_3 = \left\{\alpha, b, c, \Delta\right\}$, $X_4 = \left\{\beta, a, c, \Delta\right\}$, $X_5 = \left\{\gamma, a, b, \Delta\right\}$, $X_6 = \left\{a, \Delta\right\}$, $X_7 = \left\{b, \Delta\right\}$, $X_8 = \left\{c, \Delta\right\}$, $X_9 = \left\{\ \Delta\right\}$. Назвіть одноточкові замкнені множини в цій топології.

Розв’язок. Ця топологія називається топологією трикутника, тому що елементи множини X можна інтерпретувати як сторони трикутника a, b і c, кути між сторонами трикутника α, β і γ, а також сам трикутник Δ (див. рисунок).



Для того щоб розв’язати задачу, перевіримо всі одноточкові множини.

Чи можна стверджувати, що $\{a\}$ — замкнена множина? Для цього треба з’ясувати властивості її доповнення $X \setminus \{a\} = \left\{b, c, \alpha, \beta, \gamma, \Delta\right\}$. Якщо ми доведемо, що цю множину неможливо подати як об’єднання відкритих множин, то покажемо, що множина $\{a\}$ є не замкненою. Дійсно, для утворення множини $X \setminus \{a\} = \left\{b, c, \alpha, \beta, \gamma, \Delta\right\}$ нам потрібні множини, що містять її елементи, але водночас не містять точку a. Виявляється, що точки b, c, α и Δ можна знайти в множині $X_3 = \left\{\alpha, b, c, \Delta\right\}$, але ми не можемо знайти точки β і γ, уникнувши точки a (див. множини X_4 і X_5). Аналогічно можна довести, що множини $\left\{b\right\}$, $\{c\}$ і $\left\{\Delta\right\}$ не є замкненими.

З іншого боку,

$$X \setminus \{\alpha\} = \left\{a, b, c, \beta, \gamma, \Delta\right\} = X_4 \cup X_5,$$

$$X \setminus \left\{\beta\right\} = \left\{a, b, c, \alpha, \gamma, \Delta\right\} = X_3 \cup X_5,$$

$$X \setminus \left\{\gamma\right\} = \left\{a, b, c, \alpha, \beta, \Delta\right\} = X_3 \cup X_4.$$

Отже, замкненими одноточковими множинами в топології трикутника є множини $\{\alpha\}$, $\left\{\beta\right\}$ і $\left\{\gamma\right\}$. ■

Задача 1.4. Нехай (X, τ) — топологічний простір, $M \subset X$. Доведіть, що $\left(M, \tau_M\right)$, де $\tau_M = \left\{U_M^{(\alpha)} = U_\alpha \cap M, U_\alpha \in \tau\right\}$, є топологічним простором.

Розв’язок. Перевіримо виконання аксіом топологічного простору.

1). $\varnothing = \varnothing \cap M \in \tau_M$, $M = M \cap X \in \tau_M$.

2). $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_M^{(\alpha)} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \left(U_\alpha \cap M\right) = M \cap \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau_M$.

3). $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} U_M^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} \left(M \cap U_\alpha\right) = M \cap \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} U_\alpha \in \tau_M$.

Топологічна структура τ_M називається топологією в M, індукованою топологічним простором (X, τ), а топологічний простір $\left(M, \tau_M\right)$ називається підпростором простору (X, τ). ■

Задача 1.5. Доведіть, що для того щоб довільна відкрита множина B в підпросторі $\left(A, \tau_A\right)$ була відкритою в просторі $\left(X, \tau_X\right)$ необхідно і достатньо, щоб множина A сама була відкритою в просторі $\left(X, \tau_X\right)$.

Розв’язок. Запишемо формально, що треба довести.

Дано: $B \in \left(A, \tau_A\right)$, $B \subseteq A \subseteq X$, $B \in \tau_A$.

Довести: $B \in \tau_X \Leftrightarrow A \in \tau_X$.

Необхідність. $B \in \tau_X \Rightarrow A \in \tau_X$?

$\forall B \subseteq A \subseteq X \; B \in \tau_X \Rightarrow A \overset{def}{=} B \in \tau_X$.

Інакше кажучи, якщо будь-яка підмножина множини A є відкритою в топології τ_X, то відкритою в ній є і сама множина A, яка, безперечно, є підмножиною самої себе.

Достатність. $A \in \tau_X \Rightarrow B \in \tau_X$?

$A \in \tau_X, B \in \tau_A \Rightarrow A \in \tau_X, \exists U \in \tau_X : B = A \bigcap U \Rightarrow B \in \tau_X.$

Інакше кажучи, з огляду на те, що множина B є елементом індукованої топології τ_A, існує множина U, відкрита в топології τ_X, така що $B = A \bigcap U$. З урахуванням того, що за умовою множина A є відкритою в топології τ_X, множина B є перетином двох множин, відкритих в топології τ_X, тобто за третьою аксіомою топологічної структури, є відкритою в топології τ_X. ■

Задача 1.6. Доведіть, що підмножина M множини A є замкненою в просторі (A, τ_A) тоді і лише тоді, коли вона є перетином A і деякої замкненої в X множини.

Розв'язок. Запишемо, що треба довести.

Дано: $M \subseteq A \subseteq X$.

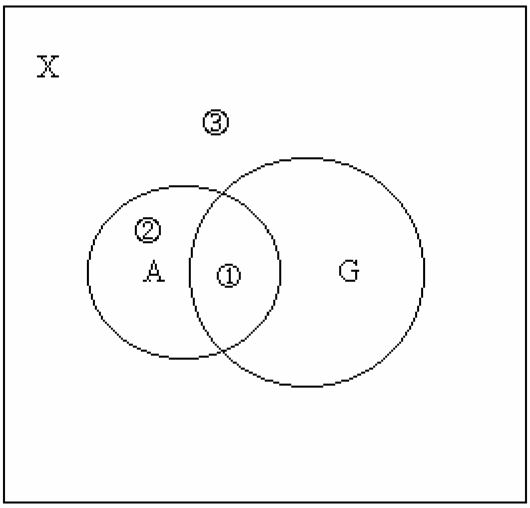
Довести. $A \setminus M \in \tau_A \Leftrightarrow \exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A.$

Необхідність.

$\forall M \subseteq A \subseteq X, A \setminus M \in \tau_A \Rightarrow \exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A$?

$A \setminus M \in \tau_A \Rightarrow \exists N \in \tau_A : M = A \setminus N \Rightarrow \exists G \in \tau_X : M = A \setminus (A \bigcap G)$, $A \setminus G \subseteq X \setminus G \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists G \in \tau_X : M = A \bigcap (X \setminus G).$



① — $A \bigcap G$

② — $M = A \setminus (A \bigcap G)$

③ — $X \setminus G$

Інакше кажучи, нехай множина M є замкненою в просторі (A, τ_A). Із цього випливає, що вона є доповненням до деякої множини N, яка є елементом топології τ_A і має вигляд $A \bigcap G$, де G — деяка множина, відкрита в топології τ_X. Зважаючи на те, що $A \setminus (A \bigcap G) = A \setminus G$ і те що $A \subseteq X$, маємо, що $A \setminus G \subseteq X \setminus G$ і $M = A \bigcap (X \setminus G)$. Оскільки множина G є відкритою в топології τ_X, її доповнення є замкненою. Таким чином, ми подали довільну замкнену підмножину M множини $A \subseteq X$ як перетин множини A і множини, замкненої в топології τ_X.

Достатність.

$\forall M \subseteq A \subseteq X\ \exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A \Rightarrow A \setminus M \in \tau_A$?

$$\exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A \Rightarrow \exists G \in \tau_X : M = A \bigcap (X \setminus G),\ A \subseteq X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \setminus M = A \setminus \left(A \bigcap (X \setminus G)\right) = A \bigcap G \Rightarrow A \setminus M \in \tau_A.$$

Інакше кажучи, припустимо, що множину M можна подати як перетин множини A і множини F, замкненої в топології τ_X. Оскільки множина F є замкненою в топології τ_X, її доповнення G є відкритою в топології τ_X. Отже, множину M можна подати як перетин $M = A \bigcap (X \setminus G)$. Таким чином, доповнення до множини M в топології τ_A є доповненням множини $A \bigcap (X \setminus G)$ до множини A. Зважаючи на те, що $A \subseteq X$, маємо, що $A \setminus M = A \bigcap G$, тобто належить індукованій топології τ_A, тобто множина M є замкненою. ■

Задача 1.7. Доведіть рівність $\overline{A} = A \bigcup A'$?.

Розв’язок. Доведемо взаємні включення.

$$\overline{A} \subset A \bigcup A'?$$

1) $x \in \overline{A}, x \in A \Rightarrow x \in A \bigcup A'$.

2) $x \in \overline{A}, x \notin A \Rightarrow A \setminus \{x\} = A, x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau \quad O(x) \bigcap A \setminus \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A \bigcup A'$

$$A \bigcup A' \subset \overline{A}?$$

1) $x \in A \bigcup A', x \in A \Rightarrow x \in \overline{A}$.

2) $x \in A \bigcup A', x \notin A \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset A \subset \overline{A}$. ■

Задача 1.8. Доведіть, що в топологічному просторі (X, τ) множина M є замкненою тоді і лише тоді, коли вона містить всі свої граничні точки, тобто $M' \subset M : M = \overline{M} \Leftrightarrow M' \subset M$.

Розв’язок. Необхідність. Припустимо, що множина M є замкненою. Отже, за означенням, вона збігається із своїм замиканням: $M = \overline{M}$. Це означає, що вона містить всі свої точки дотику. Кожна гранична точка множини є її точкою дотику. Таким чином, множина M містить всі свої граничні точки

Достатність. Для того щоб довести твердження згадаємо, що $\overline{M} = M \bigcup M'$. Отже, якщо $M' \subset M$, то $M = \overline{M}$.■

Задача 1.9. Наведіть приклад топологічного простору (X,τ) і його множини $M \subseteq X$, в якому множина M' граничних точок множини M не є замкненою.

Розв'язок 1. Розглянемо числову пряму $\mathbb{R}$ із топологією $\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Похідна множина множини $\{0\}$ є промінь $(0,\infty)$, який не є ані відкритою, а ні замкненою множиною у цій топології.

Розв'язок 2. (С.Кравченко). Розглянемо носій $X = \{a,b\}$ із тривіальною топологією $\tau = \{\varnothing, X\}$. Похідна множина множини $\{a\}$ є множина $\{b\}$, яка не є ані відкритою, а ні замкненою.

Розв'язок 3. (S.Lipschuts). Розглянемо носій $X = \{a,b,c,d,e\}$ із топологією $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$. Тоді $\{a,b,c\}' = \{b,d,e\}$, яка не є замкненою множиною, оскільки її доповнення $\{a,c\}$ не належить топології. ■

Задача 1.10. Доведіть, що похідна множина будь-якої скінченої множини в дискретній топології є порожньою.

Розв'язок. Оскільки $(A \cup B) = A' \cup B'$ і скінченну множину можна подати як скінченне об'єднання одноточкових множин, похідна множина яких є порожньою, похідна множина скінченної множини є порожньою. ■

Задача 1.11. Доведіть, що похідна множина будь-якої множини в дискретній топології не зміниться, якщо до цієї множини додати або відняти скінчену кількість точок.

Розв'язок. Оскільки $(A \setminus \{x\})' = A' = (A \cup \{x\})'$, то похідна множина будь-якої множини не зміниться, якщо до цієї множини додати або відняти скінчену кількість точок.