Функціональний аналіз
Домашня робота №8

Кєльса Данило
група К-22

7 травня 2020 р.

Задача 276

1) $H = \ell_2$, $x_n = \left(0, \ldots, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$.
Для довільного k послідоніость k-тих координат $x_k^{(n)}$ має лише скінченну кількість ненульових елементів на початку, тому $x_k^{(n)} \to 0$. тобто x_n покоординатно збірається до 0.

$$\|x_n\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-n)^2}\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

Отже, $\|x_n\|$ обмежена, тому $x_n \rightharpoonup 0$. Але $\|x_n - 0\| = \|x_n\| \not\to 0$, тому $x_n \not\to 0$.

2) $H = \ell_2$, $x_n = \left(0, \ldots, 0, 1, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\right)$.
Доведемо, що послідовність фундаментальна:

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \to 0.$$

Звідси слідує, що вона збіжна, а тому і слабко збіжна.

3) $H = L_2[0,1]$, $x_n = \cos(2\pi n t)$.
Як і в попередньому домашньому завданні, для перевірки слабкої збіжності потрібно перевірити дві властивості:

- $\|x_n\|^2 = \displaystyle\int_0^1 |\cos(2\pi n t)|^2 dt = \frac{\sin(4\pi n)}{8\pi n} + \frac{1}{2} \le 1$. Отже, $\|x_n\|$ - обмежена.
- $\forall \tau \in [0,1] : \displaystyle\int_0^\tau x_n(t) dt = \int_0^\tau \cos(2\pi n t) dt = \frac{\sin(2\pi n \tau)}{2\pi n} \to 0, \quad n \to \infty.$

Отже, $x_n \rightharpoonup 0$. Але $\|x_n\|^2 \ge \frac{1}{2}$, тому $\|x_n\| \not\to 0 \implies x_n \not\to 0$.

Задача 300

$A : X \mapsto X$

1) $X = \ell_p (p \geq 1), \quad Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$
$A(\alpha x + \beta y) = (0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(0, x_1, x_2, \dots) + \beta(0, y_1, y_2, \dots) = \alpha Ax + \beta Ay \Rightarrow$ A - лінійний.

$$\|Ax\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|$$

Звідси випливає, що A - обмежений, а тому неперервний.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} 1 = 1$$

3) $X = \ell_p (p \geq 1), \quad Ax = (x_1, 0, x_3, 0, \dots)$
$A(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1, 0, \alpha x_3 + \beta y_3, 0, \dots) = \alpha(x_1, 0, x_3, 0, \dots) + \beta(y_1, 0, y_3, 0, \dots) = \alpha Ax + \beta Ay \implies A$ - лінійний.

$$\|Ax\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n-1}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|$$

A - обмежений $\implies$ A - неперервний, $\|Ax\| \leq \|x\| \implies \|A\| \leq 1$

Розглянемо $x = (1, 0, \frac{1}{2^2}, 0, \frac{1}{3^2}, 0, \dots), x \in \ell_p$, бо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} < +\infty, p \geq 1$.

$Ax = x \implies \|Ax\| = \|x\| \implies \|A\| = 1$.

5) $X = C([-1, 1]),\ Ax(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$
$A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \frac{\alpha x(t) + \beta y(t) + \alpha x(-t) + \beta y(-t)}{2} = \alpha Ax + \beta Ay \implies A$ - лінійний.

$$\|Ax\| = \max_{t \in [-1,1]} \left| \frac{x(t) + x(-t)}{2} \right| \leq \max_{t \in [-1,1]} \left| \frac{x(t)}{2} \right| + \max_{t \in [-1,1]} \left| \frac{x(-t)}{2} \right| =$$

$$= \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|x\|}{2} = \|x\|$$

A - обмежений $\implies A$ - неперервний.
Для $x(t) \equiv 1$, $\|Ax\| = \max\limits_{t \in [-1,1]} | \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | = 1 = \|x\| \implies \|A\| = 1$.

7) $X = C([0, 1]),\ Ax(t) = \int\limits_0^1 \cos t \sin s x(s) ds$

$A(\alpha x + \beta y) = \int\limits_0^1 \cos t \sin s (\alpha x(s) + \beta y(s)) ds = \alpha Ax + \beta Ay \implies$ A - лінійний.

$$\|Ax\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \cos t \int_0^1 \sin s x(s) ds \right| = \max_{t \in [0,1]} |\cos t| \cdot \left| \int_0^1 \sin s x(s) ds \right| \leq$$

$$\leq 1 \cdot \int_0^1 |\sin s||x(s)|ds \leq \max_{s\in[0,1]} |x(s)| \cdot \int_0^1 \sin s ds = \|x\|(1-\cos 1)$$

A - обмежений $\implies$ A - неперервний. $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1-\cos 1$.

Нехай $x(t) \equiv 1$, тоді

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 \cos t \sin s ds \right| = \max_{t\in[0,1]} |\cos t| \cdot \left| \int_0^1 \sin s ds \right| = 1-\cos 1$$

Отже, $\|A\| = 1-\cos 1$.

9) $X = l_2$, $Ax = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, x_1, x_2, x_3, \dots)$

$A(\alpha x+\beta y) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, \alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \dots) = \alpha Ax+\beta Ay \implies$ A - лінійний.

$\|Ax\| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \|x\| \implies A$ - обмежений $\implies$ - неперервний.

$\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} 1 = 1$.

Задача 304

1) $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots\right)$

Довільний оператор $g \in \ell_2^*$ можна записати у вигляді $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i x_i$. Тоді

$$g(Ax) = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot \frac{1}{2}x_2 + g_3 \cdot \frac{1}{3}x_3 + \dots$$

Із рівності $f(x) = g(Ax)$ отримуємо $f_1 = g_1$, $f_2 = \frac{1}{2}g_2$, $f_3 = \frac{1}{3}g_3, \dots$ Оскільки $f = A^*g$, то оператор $A^* : \ell_2 \mapsto \ell_2$ задається формулою

$$A^*y = \left(y_1, \frac{1}{2}y_2, \frac{1}{3}y_3, \dots\right)$$

2) $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, \dots)$

Довільний оператор $g \in \ell_2^*$ можна записати у вигляді $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i x_i$. Тоді

$$g(Ax) = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot 0 + g_3 \cdot x_3 + g_4 \cdot 0 + \dots =$$

$$= g_1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + g_3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \dots$$

Із рівності $f(x) = g(Ax)$ отримуємо $f_1 = g_1$, $f_2 = 0$, $f_3 = g_3, f_4 = 0 \dots$ Оскільки $f = A^*g$, то оператор $A^* : \ell_2 \mapsto \ell_2$ задається формулою

$$A^*y = (y_1, 0, y_3, 0 \dots)$$

3) $Ax = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, x_3, 0, 0, \ldots)$

Довільний оператор $g \in \ell_2^*$ можна записати у вигляді $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i x_i$. Тоді

$$g(Ax) = g_1 \cdot (2x_1 + 3x_2) + g_2 \cdot (3x_1 + 5x_2) + g_3 \cdot x_3 + g_4 \cdot 0 + \ldots =$$

$$= (2g_1 + 3g_2) \cdot x_1 + (3g_1 + 5g_2) \cdot x_2 + g_3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \ldots$$

Із рівності $f(x) = g(Ax)$ отримуємо $f_1 = 2g_1 + 3g_2$, $f_2 = 3g_1 + 5g_2$, $f_3 = g_3$, $f_4 = 0 \ldots$
Оскільки $f = A^*g$, то оператор $A^* : \ell_2 \mapsto \ell_2$ задаєтья формулою

$$A^*y = (2y_1 + 3y_2, 3y_1 + 5y_2, y_3, 0, 0, \ldots)$$

Задача 307

$A_n : \ell_p \mapsto \ell_p, \quad 1 < p < \infty$

1) $A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n+1}, \frac{x_3}{n+2}, ...\right)$

$$\|A_n x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{n+k-1}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{n}\right|^p\right)^{1/p} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = \frac{1}{n}\|x\|$$

Отже, $\frac{\|A_n x\|}{\|x\|} \to 0 \implies \|A_n\| = \sup \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = 0$, звідки випливає, що $A_n \rightrightarrows 0$, а тому $A_n \to 0, \quad A_n \rightharpoonup 0$.

3) $A_n x = (0, .., 0, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$

$$\|A_n x\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

$\|A_n x\| \to 0$ як хвіст збіжного ряду, тому $A_n \to 0 \implies A_n \rightharpoonup 0$.
Доведемо, що $A_n \not\rightrightarrows 0$. Для цього зауважимо, що для довільного n виконується $\|A_n e_n\| = 1 = \|e_n\|$, тому $\|A_n\| = \sup \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} \geq 1 \not\to 0$.

5) $A_n x = (0, ..., 0, x_n, 0, ...)$

$$\|A_n x\| = (|x_n|^p)^{1/p} = |x_n|$$

З того, що $x \in \ell_p$ випливає, що $|x_n|^p \to 0 \implies |x_n| \to 0$. Отже, $\|A_n x\| \to 0$, а тому $A_n \to 0, \quad A_n \rightharpoonup 0$.
Доведемо, що $A_n \not\rightrightarrows 0$. Аналогічно попередньому пункту для кожного n виконуєтсья $\|A_n e_n\| = \|e_n\| = 1$, тому $\|A_n\| = \sup \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} \geq 1 \not\to 0$.

Задача 308

$A : \ell_2 \mapsto \ell_2$

1) $Ax = (x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, ...)$

Очевидно, оператор A лінійний. Також маємо $\|Ax\| = \|x\|$, тому A обмежений, а отже неперервний. За теоремою Банаха про обернений оператор у банаховому просторі ℓ_2 для доведення оборотності A достатньо показати, що він є взаємно-однозначним, тобто для будь-якого елемента $y \in \ell_2$ рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок.

$$Ax = (x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, ...) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, ...)$$

$$\begin{cases} x_{4n} = y_{4n} \\ x_{4n-1} = y_{4n-2} \\ x_{4n-2} = y_{4n-1} \\ x_{4n-3} = y_{4n-3} \end{cases}$$

Зрозуміло, що така система має єдиний розв'язок $x = A^{-1}y = (y_1, y_3, y_2, y_4, y_5, ...)$. Отже, оператор A непервно оборотний.

3) $Ax = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3, x_4, ...)$

Лінійність оператора A очевидна. Доведемо обмеженість:

$$\|Ax\|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + x_4^2 + ... \leq$$

$$\leq x_1^2 + 2|x_1 x_2| + x_2^2 + x_2^2 + 2|x_2 x_3| + x_3^2 + x_4^2 + ... \leq \text{ за нерівністю Коші}$$

$$\leq x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_3^2 + x_4^2 + ... =$$

$$= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + ... \leq 4\|x\|^2$$

Звідси $\|A\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 2$, тому A обмежений, отже неперервний.
Для доведення оборотності використаємо теорему Банаха: $Ax = y \implies$
$(x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3, x_4, ...) = (y_1, y_2, y_3, y_4, ...)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ x_n = y_n, \qquad n \geq 3 \end{cases}$$

З системи маємо, що $x_2 = y_2 + y_3, \quad x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, тому
$x = A^{-1}y = (y_1 - y_2 - y_3, y_2 + y_3, y_3, y_4, \ldots)$. Отже, оператор оборотний.

5) $Ax = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

За означенням, оборотний оператор повинен бути сюр'єктивним. Але множина значень цього оператора $R(A) = \{y \in \ell_2 : y = (0, y_1, y_2, ,)\} \neq \ell_2$, тому оператор не є оборотним.

7) $Ax = (x_1 - x_2, 2x_2 - 2x_1, x_3, \ldots)$

Лінійність і обмеженість доводиться аналогічно п.3). За теоремою Банаха $Ax = y$, тоді

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ 2x_2 - 2x_1 = y_2 \\ x_n = y_n, \qquad n \geq 3 \end{cases}$$

Звідси $y_2 = -2y_1$. Але тоді $R(A) \neq \ell_2$, бо, наприклад, для $y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) \in \ell_2$, але $y \notin R(A)$, бо $y_2 = -2y_1$. Отже, оператор не оборотний.