Функціональний аналіз
Домашня робота №7

Кєльса Данило
група К-22

29 квітня 2020 р.

Задача 263

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ - скінченновимірний нормований лінійний простір. Нехай $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - базис X. Тоді для довільного $x \in X$ існує єдиний вектор $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ такий, що $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$.
Визначимо лінійні функціонали $f_i : X \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ наступним чином:

$$f_i(x) = f_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = a_i$$

Тоді кожен $f_i \in X^*$, і функціонлали f_i утворюють базис X^*.
Визначимо на X норму $\ell_1 : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|$. Відомо, що в скінченновимірному просторі всі норми еквівалентні, тому збіжність в одній нормі буде означати збжність в усіх.
Нехай $(x_n) \subset X$, $x_n \rightharpoonup x$, тоді за означенням $f_i(x_n) \to f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, тобто $|f_i(x_n) - f_i(x)| \to 0$, звідки $\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x_n) - f_i(x)| \to 0$, а отже $x_n \to x$.$\blacksquare$

Задача 269

$\Longrightarrow$ Нехай $x_n = (\xi_k^{(n)}) \rightharpoonup x$. За теоремою 12.1 будь-яка слабко збіжна послідовність обмежена за нормою, тому виконується умова (1). За означенням слабкої збіжності $\forall f \in (\ell_p)^* : f(x_n) \to f(x)$, тому визначимо лінійні оператори:

$$f_i(x) = \xi_i,\ x \in \ell_p,\ i \in \mathbb{N}$$

Так як $f_i(x_n) \to f_i(x)$, то виконуєтсья покоординатна збіжність, тобто умова (2).
$\Longleftarrow$ Нехай x_n - послідовність, обмежена деякою константою M і покоординатно збіжна. Визначимо $S = \{f_i \in (\ell_p)^*, i \in \mathbb{N}\}$, де f_i визначаються аналогічно першій частині доведення. Для довільного $g \in \mathrm{span} S$ виконується $g = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k f_k$. Тому очевидно, що $g(x_n) \to g(x)$ як лінійна комбінація f_i. Далі візьмемо довільний $g \in (\ell_p)^* = \mathrm{cl}(\mathrm{span} S)$,

тоді $g = \lim_{k\to\infty} g_k$ для деякої послідовності $(g_k) \subset \text{span} S$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Так як $g = \lim_{k\to\infty} g_k$, то існує таке $K \in \mathbb{N}$, що $\|g - g_k\| \le \varepsilon$ для всіх $k > K$. Тоді

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x)| &\le |g(x_n) - g_k(x_n)| + |g_k(x_n) - g_k(x)| + |g_k(x) - g(x)| \le \\ &\le \|g - g_k\| \, \|x_n\| + |g_k(x_n) - g_k(x)| + \|g_k - g\| \, \|x\| \le \\ &\le \varepsilon M + |g_k(x_n) - g_k(x)| + \varepsilon \, \|x\| \end{aligned}$$

Спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо

$$\limsup_{n\to\infty} |g(x_n) - g(x)| \le \varepsilon M + \lim_{n\to\infty} |g_k(x_n) - g_k(x)| + \varepsilon \, \|x\|$$

Так як $g_k \in \text{span} S$, то $\lim_{n\to\infty} |g_k(x_n) - g_k(x)| = 0$. Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} |g(x_n) - g(x)| \le \varepsilon M + \varepsilon \|x\|$$

Так як $\varepsilon > 0$ довільне, то $\limsup_{n\to\infty} |g(x_n) - g(x)| = 0$, що еквівалентно $\lim_{n\to\infty} |g(x_n) - g(x)| = 0$, тобто $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. так як $g \in (\ell_p)^*$ довільне, то $x_n \rightharpoonup x$.$\blacksquare$

Задача 270

1. $H = L_2([0,1])$, $x_n(t) = \sqrt{n} \cdot \chi_{[0,1/n]}(t)$ Послідовність x_n поточково збігається до $x \equiv 0$, тому ця функція є "кандидатом"на слабку і сильну збіжність.

   $$\|x_n\|^2_{L_2} = \int_0^1 |x_n(t)|^2 dt = \int_0^{1/n} n dt = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

   Отже, $\|x\|_{L_2} = 0 \ne 1 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{L_2}$, тому $x_n \not\to x$.
   Дослідимо на слабку збіжність. Для цього потрібно перевірити дві умови:

   1) $\exists C > 0 \forall n \ge 1 : \|x_n\| \le C$
   2) $\forall \tau \in [0,1] : \int_0^\tau x_n(t) dt \to \int_a^\tau x(t) dt$, $n \to \infty$

   Очевидно, перша умова виконується, бо $\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| = 1$.
   Перевіримо другу умову. $\forall \tau \in (0,1] \exists N \in \mathbb{N} \forall n \ge N : \frac{1}{n} < \tau$, тому при $n \ge N$:

   $$\int_0^\tau x_n(t) dt = \int_0^{1/n} \sqrt{n} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 = \int_0^\tau x(t) dt$$

   Отже, $x_n \rightharpoonup x$.

2. $H = L_2([0,1])$, $x_n(t) = 2n(1 - nt) \cdot \chi_{[0,1/n]}(t)$

   $$\|x_n\|^2_{L_2} = \int_0^1 |x_n(t)|^2 dt = \int_0^{1/n} 4n^2(1 - nt)^2 dt = 4n^2 \int_0^{1/n} (1 - 2nt + n^2t^2) dt =$$

   $$= 4n^2(t - nt^2 + \frac{n^2}{3} t^3)\Big|_0^{1/n} = 4n^2(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2} + \frac{n^2}{3} \cdot \frac{1}{n^3}) = \frac{4n}{3}$$

   Отже, $\|x_n\|_{L_2} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{3}} \to \infty$, тому $x_n \not\rightharpoonup x \implies x \not\to x$.

Задача 271

Доведемо спочатку, що слабко відкрита множина є відкритою. Слабка топологія є найменшою топологією, що в ній кожен елемент спряженого простору є неперервним. Так як кожен такий елемент є неперервним в топології, утвореній нормою, то, очевидно, пожна множина, що належить слабкій топології, належить і топології норми, тому є відкртою. Звідси, якщо A - слабко замкнена множина, то A^c - слабко відкрита, а тому відкрита, тому A - замкнена.$\blacksquare$

Задача 272

Нехай Y - лінійний підпростір банаховогу простору X. Розглянемо $Y^0 = \{f \in X^* : f|_Y = 0\} \subseteq X^*$. Доведемо, що

$$Y = \bigcap_{f \in Y^0} \ker f$$

З одного боку, $Y \subseteq \ker f$ для кожного $f \in Y^0$, тоді $Y \subseteq \bigcap\limits_{f \in Y^0} \ker f$.

З іншого боку, нехай $x \in X \setminus Y$. За наслідком з теорми Хана-Банаха відомо, що існує $f \in X^*$ такий, що $f(x) = 1$ і $f|_Y = 0$. Тоді $x \notin \ker f$, звідки робимо висновок, що $\bigcap\limits_{f \in Y^0} \ker f \subseteq Y$.

Далі, зауважимо що для $f \in X^*$ $\ker f$ - слабко замкнена множина, як прообраз $\{0\}$ слабко неперервною функцією f. Отже, Y - слабко замкнена множина як перетин слабко замкнених множин. $\blacksquare$