Функціональний аналіз
Домашня робота №6

Кєльса Данило
група К-22

25 квітня 2020 р.

Задача 217

1. $E = \ell_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$

   1) $f(\alpha x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha x_n}{n} = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha f(x);$

   2) $f(x+y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + y_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n} = f(x) + f(y).$

   Отже, оператор лінійний.
   $\|f(x)\| = \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|.$
   Отже, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 1$, тоді f обмежений і неперервний функціонал. За означенням $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, тоді, наприклад, для $x = (1, 0, 0, \ldots)$ маємо $\|x\| = 1$, $\|f(x)\| = 1$, отже $\|f\| = 1$.

2. $E = \ell_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$
   Лінійність очевидна. Доведемо обмеженість:
   $$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\| \implies \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1.$$
   Розглянемо послідовність (u_n) послідовностей в ℓ_1, що побудована наступним чином:
   $$u_n = \{x_k = 1 \text{ для } k = n, x_k = 0 \text{ для } k \neq n\}$$
   Тоді
   $$\frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|} = |f(u_n)| = \left|1 - \frac{1}{n}\right| \to 1, n \to \infty$$
   Отже, $\|f\| = 1$.

3. $E = c_0,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} x_n$

   Лінійність очевидно випливає з лінійності суми ряду. Доведемо обмеженість.

   $|f(x)| = \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} x_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|2^{-n+1} x_n\right| \le \max\limits_n |x_n| \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} = 2 \max\limits_n |x_n| = 2\,\|x\|_\infty .$

   Отже, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \le 2$.

   Розглянемо послідовність (u_n) послідовностей в c_0, що побудована наступним чином:

   $$u_n = \{x_k = 1 \text{ для } k \le n, x_k = 0 \text{ для } k > n\}$$

   Тоді

   $$\frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|} = |f(u_n)| = \sum_{k=1}^{n} 2^{-n+1} \to \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n+1} = 2.$$

   Отже, $\|f\| = \sup \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 2$.

4. $E = \ell_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$

   Лінійність очевидна. Доведемо обмеженість:

   $$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\| \implies \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le 1.$$

   Очевидно, що для довільної невід'ємної послідовності $x_n \in \ell_1$ (наприклад, $x_n = 2^{-n}$) виконується $|f(x)| = \|x\|$, тому $\|f\| = 1$.

5. $E = c,\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

   E - простір збіжних послідовностей з нормою $\|x\|_\infty = \sup\limits_n |x_n|$, тому

   $$|f(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| = \lim_{n\to\infty} |x_n| \le \sup_n |x_n| = \|x\|_\infty \implies \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le 1.$$

   Якщо $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, то $\|x\| = |f(x)| = 1$, тоді $\|f\| = 1$.

Задача 218

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{x_1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} x_n\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{x_1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3x_n}{2^n}.$$

Лінійність f випливає з лінійності суми ряду. Доведемо обмеженість f. Для кожного $x \in \ell_2$

$$|f(x)| \le \frac{|x_1|}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3|x_n|}{2^n} \le \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{4^n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 .$$

за нерівністю Коші-Буняковського. Отже, f лінійний, обмежений, тому і неперервний функціонал, і $\|f\| \leq 1$. Для $\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{2^n}, \ldots) \in \ell_2$ в нерівності Коші-Буняковського виконується рівність, тому $\|f\| = 1$.

Задача 220

Нехай $A = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ - лінійна оболонка векторів $x-1, x_2, \ldots, x_n$. Розширимо функціонал $f(x_k) = c_k$ на підпростір A.

$$y \in A \implies y = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \implies f(y) = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k.$$

Для того, щоб застосувати теорему Хана-Банаха в нормованому просторі і довести, що цей функціонал можна розширити на весь простір, потрібно довести його обмеженість.

$$|f(y)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k c_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k c_k| \leq \max_k |c_k| \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq C \|y\|,$$

якщо за "норму"y взяти $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.

Отже, за теоремою Хана-Банаха функціонал f з властивістю $f(x_k) = c_k$ продовжується на весь простір E.■

Задача 227

1. $E = C([-\pi, \pi])$, $f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin t dt$

   $$|f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin t dt\right| \leq \text{за першою теоремою про середнє}$$

   $$\leq \left|\sup_{t\in[-\pi,\pi]} x(t) \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt\right| = \left|\sup_{t\in[-\pi,\pi]} x(t) \cdot 0\right| = 0 \implies \|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 0 \implies \|f\| = 0.$$

   Норма досягається на одиничній кулі.

2. $E = C^1([0,1])$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t x(t) dt$

   $$|f(x)| = \left|\int_0^1 t x(t) dt\right| \leq \int_0^1 |t x(t)| dt \leq \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq$$

   $$\leq \frac{1}{2}(\sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)|) = \frac{1}{2} \|x\|_{C^1}.$$

   Отже, $\|f\| \leq \frac{1}{2}$. Якщо взяти $x(t) = 1$, то $\|x\| = 1$, $|f(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 t dt\right| = \dfrac{1}{2}$, тому $\|f\| = \frac{1}{2}$, і вона досягаєтсяь на одиничній кулі.

Задача 228

1. Нехай $f = (f(1), f(2), \ldots) \in c_0$ і $g = (g(1), g(2), \ldots) \in \ell_1$. Тоді доведемо, що $\phi_g(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)g(k)$ обмежений лінійний функціонал в c_0. За нерівністю Гельдера для ℓ_p маємо (так як $c_0 \subseteq \ell_\infty$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)g(k)| \leq \|g\|_1 \|f\|_\infty \tag{1}$$

отже, ряд абсолютно збіжний, тому для $f_1, f_2 \in c_0$ маємо

$$\phi_g(f_1 + f_2) = \sum_{k=1}^{\infty}(f_1 + f_2)(k)g(k) = \sum_{k=1}^{\infty}(f_1(k) + f_2(k))g(k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_1(k)g(k) + \sum_{k=1}^{\infty} f_2(k)g(k) = \phi_g(f_1) + \phi_g(f_2)$$

і для $\alpha \in \mathbb{F}$ маємо

$$\phi_g(\alpha f) = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha f)(k)g(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha f(k)g(k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f(k)g(k) = \alpha\phi_g(f).$$

Отже, $\phi_g : c_0 \to \mathbb{F}$ лінійний. З (1)

$$|\phi_g(f)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f(k)g(k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)g(k)| \leq \|g\|_1 \|f\|_\infty ,$$

отже

$$\|\phi_g\| = \sup\{|\phi_g(f)| : f \in c_0, \|f\|_\infty = 1\} \leq \|g\|_1 < \infty,$$

отже ϕ_g обмежений лінійний функціонал.

2. Тепер ми покажемо, що всі лінійні обмежені функціонали мають вигляд ϕ_g для деякого $g \in \ell_1$. Нехай ϕ обмежений функціонал на c_0. Визначимо $\delta_i \in c_0$ як послідовність з 1 на i-тому місці і 0 на всіх інших. Для кожного $k \in \mathbb{N}$, визначимо $g(k) = \phi(\delta_k)$ і також визначимо

$$h(k) = \begin{cases} \frac{|g(k)|}{g(k)} & g(k) \neq 0 \\ 0 & g(k) = 0. \end{cases}$$

Для фіксованого $N \in \mathbb{N}$, нехай $h_N = \sum_{k=1}^{N} h(k)\delta_k$ (згадаємо, що $\delta_k \in c_0, h(k) \in \mathbb{F}$). Тоді $h_N \in c_0$ і $\|h_N\|_\infty = 1$. З цього

$$\phi(h_N) = \phi\left(\sum_{k=1}^{N} h(k)\delta_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \phi(h(k)\delta_k) = \sum_{k=1}^{N} h(k)\phi(\delta_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} h(k)g(k) \text{ так як } g(k) = \phi(\delta_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |g(k)| \text{ за означенням } h(k).$$

Так як $|\phi(h_N)| \le \|h_N\|_\infty \|\phi\|_{c_0^*}$ за означенням операторної норми в c_0^*, то

$$\sum_{k=1}^{N} |g(k)| = \sum_{k=1}^{N} |\phi(\delta_k)| \text{ за означенням } g(k)$$

$$\le \|\phi\|_{c_0^*} \text{ так як } \|h_N\|_\infty = 1.$$

Тепер права частина залежить лише від ϕ, а в лівій частині $N \in \mathbb{N}$ - довільне. Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\phi(\delta_k)| \le \|\phi\|_{c_0^*} \tag{2}$$

і $g \in \ell_1$.

3. Далі покажемо, що ϕ як елемент c_0^* збігається з ϕ_g з п.1 доведення, де g визначене в п.2. За означенням, для довільного $f \in c_{00}$ (підмножина c_0, що складається з послідовностей, в яких скінченна кількість ненульових елементів) $\phi(f) = \phi_g(f)$. Відомо, що c_{00} щільна в c_0. З того, що ϕ неперервна (обмежена за означенням), і ϕ_g неперервна (обмежена $\|g\|_1$) і $\phi = \phi_g$ на щільній підмножині c_{00}, маємо, що $\phi = \phi_g$ на c_0. Звідси, для довільного $\phi \in c_0^*$, існує $g \in \ell_1$ таке, що $\phi = \phi_g$. З цього слідує, що відораження $g \to \phi_g$ сюр'єктивне.

4. Для того, щоб показати, що $g \to \phi_g$ - ізометрія, помітимо, що $\|\phi_g\|_{c_0^*} \le \|g\|_1$ з п.1 доведення (слідує з нерівності Гельдера), і $\|g\|_1 \le \|\phi_g\|_{c_0^*}$ за (2) з п.2. Отже, $\|g\|_1 = \|\phi_g\|_{c_0^*}$ - ізометрія. Отже, існує сюр'єктивна ізометрія з ℓ_1 в c_0^*.$\blacksquare$