# Функціональний аналіз
# Домашня робота

Кєльса Данило
група К-22

18 квітня 2020 р.

## Задача 196

1. $f(x) = |x(1) - x(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$, $x(t) \in C^1([0,1])$.

    1) $\forall x \in C^1([0,1])$ $f(x) \geq 0$.
    2) Перевіримо, що $f(x) = 0 \iff x \equiv 0$.
    Якщо $f(x) = 0$, то одночасно виконується
    $\begin{cases} |x(1) - x(0)| = 0, \\ \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| = 0. \end{cases}$
    З другої рівності випливає, що $x(t) = C$, $t \in [0,1]$, а з першої, що $C = x(1) = x(0)$. Якщо $x(a) \neq 0$, то $x(t) \not\equiv 0$. Отже, перша аксіома не виконується, тому $f(x)$ не є нормою.■

2. $f(x) = |x(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$, $x \in C^1([0,1])$.

    1) $\forall x \in C^1([0,1])$ $f(x) \geq 0$.
    2) $f(x) = 0 \iff x \equiv 0$.
    Якщо $f(x) = 0$, то одночасно виконується
    $\begin{cases} |x(0)| = 0, \\ \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| = 0. \end{cases}$
    З другої рівності випливає, що $x(t) = C$, $t \in [0,1]$, а з першої, що $C = 0$. Отже, $x(t) \equiv 0$.
    Навпаки, якщо $x(t) \equiv 0$, то очевидно $f(x) = 0$
    3) $f(\alpha x) = |\alpha x(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |\alpha x'(t)| = |\alpha|(|x(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|) = |\alpha| f(x)$.
    4) $f(x+y) = |x(0) + y(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t) + y'(t)| \leq |x(0)| + |y(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |y'(t)| = f(x) + f(y)$.

    Отже, $f(x)$ задовільняє всім аксіомам норми.■

3. $f(x) = |x(1)| + |x(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x''(t)|$, $x \in C^2([0,1])$.

1) $\forall x \in C^1([0,1])\ f(x) \geq 0$.

2) Якщо $x(t) \equiv 0$, то очевидно $f(x) = 0$.
Якщо $f(x) = 0$, то одночасно виконується
$$\begin{cases} |x(0)| = 0, \\ |x(1)| = 0, \\ \max_{t\in[0,1]} |x''(t)| = 0. \end{cases}$$
З останньої рівності маємо, що $x(t) = c_1 t + c_2$, тоді $x(0) = 0 \implies c_2 = 0$, $x(1) = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \implies c_1 = 0$. Отже, $x(t) \equiv 0$.

3) Властивості 3-4 доводяться аналогічно п.2 цієї задачі, за властивостями модуля.

Отже, $f(x)$ задовільняє всім аксіомам норми.$\blacksquare$

# Задача 197

Розглянемо аксіоми норми для $\varphi(x) = \max\limits_{t\in[0,1]} \alpha(t)|x(t)|$, $x \in C([0,1])$.

1) $\varphi(x) \geq 0$, тоді повинна існувати хоча б одна точка $t_0$ така, що $\alpha(t_0) \geq 0$.

2) $\varphi(x) = 0 \iff x(t) \equiv 0$.
Якщо $x(t) \equiv 0$, то очевидно $\varphi(x) = 0$.
Нехай $\varphi(x) = 0$. Покажемо, що тоді для того, щоб $x(t) \equiv 0$ необхідно, щоб функція $\alpha(t)$ була невід'ємною на всій області визанчення, при чому вона може дорівнювали нулю лише на зіченній множині точок.
Від супротивного, якщо $\exists t_0 : \alpha(t_0) < 0$, то з неперервності $\alpha$ маємо, що вона менше нуля в деякому околі точки $t_0$. Тоді нехай $A = \{t : \alpha(t) < 0\}$. Далі побудуємо функцію $x(t)$ таким чином:
$$x(t) = \begin{cases} -\alpha(t) & t \in A \\ 0 & t \notin A \end{cases}$$
Звідси
$$\varphi(x) = \max_{t\in[0,1]} \alpha(t)|x(t)| = \max_{t\in[0,1]} \alpha(t)x(t) = \max_{t\in[0,1]} \begin{cases} -\alpha^2(t) & t \in A \\ 0 & t \notin A \end{cases} = 0.$$
Отже, $x(t) \not\equiv 0$, тому перша аксіома не виконується. Тоді $\alpha(t) \geq 0$.
Далі нехай $\exists t', t'' : \forall t \in [t', t''] : \alpha(t) = 0$. Тоді побудуємо функцію $x(t)$ наступним чином:
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \notin [t', t''] \\ \frac{x-t'}{t''-t'} & t \in [t', \frac{t'+t''}{2}] \\ -\frac{x-t''}{t''-t'} & t \in [\frac{t'+t''}{2}, t''] \end{cases}$$
Очевидно, що $x(t) \in C[0,1]$, але $\alpha(t) \cdot x(t) \equiv 0$, тому $\varphi(x) = 0$, $x \not\equiv 0$, що суперечить першій аксіомі норми.

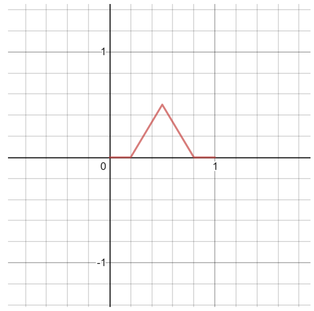


Рис. 1: Графік функції $x(t)$

3) $\varphi(\lambda x) = \max\limits_{t\in[0,1]} \alpha(t)|\lambda x(t)| = |\lambda| \max\limits_{t\in[0,1]} \alpha(t)|x(t)| = |\lambda|\varphi(x)$.

4) $\varphi(x+y) = \max\limits_{t\in[0,1]} \alpha(t)|x(t)+y(t)| \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \alpha(t)|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} \alpha(t)|y(t)| = \varphi(x)+\varphi(y)$.

Бачимо, що аксіоми 3 та 4 норми виконуються незалежно від функції $\alpha(t)$, тому остаточно: $\alpha(t) \geq 0$, $\alpha(t) = 0$ не більш ніж на зліченній множині точок.■

# Задача 198

1) $x(t) = t^n$, $X = C([0,1])$.
$\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$.

2) $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$, $X = \ell_2$.
$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

3) $x(t) = t$, $X = L_4([0,1])$.
$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^4 dt\right)^{1/4} = \left(\int_0^1 t^4 dt\right)^{1/4} = \left(\frac{t^5}{5}\Big|_0^1\right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

4) $x(t) = \sin t + \cos t$, $X = L_2([0,1])$.
$$\|x\|_2 = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (\sin t + \cos t)^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (\sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t\cos t) dt\right)^{1/2} =$$
$$\left(\int_0^1 (1+\sin 2t) dt\right)^{1/2} = \left(\left(t - \frac{1}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^1\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2}$$

5) $x = \left(\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}, \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}, \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}, \ldots\right)$, $X = \ell_2$.
$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right)^{1/2} =$$
$$\sqrt{\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})} = 1$$

6) $x(t)=t^2$, $X=C^1([0,1])$.
$\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} x(t) + \sup\limits_{t\in[0,1]} x'(t) = \sup\limits_{t\in[0,1]} t^2 + \sup\limits_{t\in[0,1]} 2t = 1+2=3$

# Задача 199

Розглянемо послідовність функцій $f_n(x)\in C[-1,1]$, що визначені як

$$f(x)=\begin{cases} -1 & x\in[-1,-\frac{1}{n}] \\ nx & x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \\ 1 & x\in[\frac{1}{n},1] \end{cases}$$

Нехай $n>m$. Зауважимо, що $|f_n(x)-f_m(x)|$ симетрична відносно $t=0$. Використовуючи це, запишемо

$$|f_n(x)-f_m(x)|=\begin{cases} nx-mx & x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 1-mx & x\in[\frac{1}{n},\frac{1}{m}] \\ 0 & x\in[\frac{1}{m},1] \end{cases}$$

Порахуємо відповідні інтеграли:

$$\int_0^1 |f_n(x)-f_m(x)|dx = \int_0^{1/n}(n-m)xdx + \int_{1/n}^{1/m}(1-mx)dx =$$

$$=(n-m)\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

Враховуючи вищевказану симетрію, отримаємо, що $\|f_n(x)-f_m(x)\|=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\to 0$, $n,m\to\infty$. Отже, послідовність $f_n$ - фундаметальна.
Але границя цієї послідовності не є неперервною. Зрозуміло, що границею є функція

$$f(x)=\begin{cases} -1 & x\in[-1,0) \\ 0 & x=0 \\ 1 & x\in(0,1] \end{cases}$$

адже $\|f-f_n\|_{L^1[-1,1]}=\frac{1}{n}\to 0$, $n\to\infty$.
Отже, послідовність $f_n\in C[-1,1]$ збігається до розривної функції за нормою $L^1[-1,1]$, тому $C[-1,1]$ не є банаховим простором. ■

# Задача 201

1) $x_n=(1,0,\ldots,0,1/n,0,0,\ldots)$, $X=\ell_p$.
$\|x_{n+q}-x_n\|_p=\dfrac{1}{n^p}-\dfrac{1}{(n+q)^p}\to 0$, $n\to\infty$, тому послідовність фундаментальна, а отже і збіжна.

2) $x_n=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}},0,0,\ldots\right)$, $X=\ell_p$.
$\|x_{n+q}-x_n\|_p = \left(\sum\limits_{k=n+1}^{n+q}\dfrac{1}{k^{p/2}}\right)^{1/p} \le \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{p/2}}\right)^{1/p}$, при $p>2$ остання сума

прямує до 0, тому послідовність фундаментальна, а отже збіжна. Доведемо, що при $p = 2$ послідовність не фундаментальна.

$$\|x_{2n} - x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}} \geq \sqrt{\frac{1}{2n} \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0.$$

При $p < 2: \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^{p/2}} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

Отже, послідовність збіжна лише при $p > 2$.

3) $x_n = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right)$, $X = \ell_p$.

$\|x_{n+q} - x_n\|_p = \left(\displaystyle\sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{1}{k^p}\right)^{1/p} \leq \left(\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p}\right)^{1/p}$, тоді при $p > 1$ послідовність є фундаментальною.

Доведемо, що при $p = 1$ вона не фундаментальна.

$$\|x_{2n} - x_n\| = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n-1} \cdot n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

Отже, послідовність збіжна при $p > 1$, розбіжна при $p = 1$.

4) $x_n(t) = e^{-t/n}$, $X = C[0,1]$.

$\|x_{n+p} - x_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|e^{-t/n} - e^{-t/n+p}\right| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|e^{-t}(e^{1/n} - e^{1/n+p})\right| = (e^{1/n} - e^{1/n+p}) \max\limits_{t\in[0,1]} \left|e^{-t}\right| = e^{1/n} - e^{1/n+p} \to 1 - 1 = 0$, $n \to \infty$, тому послідовність фундаментальна, а так як простір $C[0,1]$ з нормою супремуму є банаховим, то і збіжна.

5) $x_n = t^n - t^{3n}$, $X = L_p[0,1]$.

$$\|x_{n+q} - x_n\| = \left(\int_0^1 |t^{n+q} - t^{3(n+q)} - t^n + t^{3n}|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |t^{n+q} - t^{3(n+q)}|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |t^n - t^{3n}|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 (t^{n+q} - t^{3(n+q)})^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 (t^n - t^{3n})^p dt\right)^{1/p} =$$

$= \left(\dfrac{1}{n+q+1} - \dfrac{1}{3n+3q+1}\right)^{1/p} + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{3n+1}\right)^{1/p} \to 0 + 0 = 0$, $n \to \infty$, де перша нерівність виконується за нерівністю Мінковського, а друга, бо $p \geq 1, t^n - t^{3n} \in [0,1]$. З цього маємо, що послідовність фундаментальна, а отже збіжна.

6) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$, $X = C[0,1]$.

Покажемо, що $x_n$ не фундаментальна.

$$\|x_n - x_{2n}\| = \max_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_{2n}(t)| \geq \left|x_n\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} - x_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\right| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right| =$$

$\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}\right| = \left|\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{9}\right| > 0$. Отже, $x_n$ не фундаментальна, тому не збіжна.