Функціональний аналіз
Домашня робота

Кєльса Данило
група К-22

11 квітня 2020 р.

Задача 157

$d(A,B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} d(x,y),\ d(x,B) = \inf\limits_{y\in B} d(x,y) \implies d(A,B) = \inf\limits_{x\in A} d(x,B),$ тобто потрібно довести, що функція $f(x) = d(x,B)$ досягає свого інфімума на A. Так як A - компакт, то потрібно довести неперервність $f(x)$, і тоді за теоремою Вейєрштрасса буде досягатися інфімум.
Доведемо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x,a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) = |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Нехай $y_1, y_2 \in B,\ d(x,B) = d(x,y_1),\ d(a,B) = d(a,y_2)$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Якщо $d(x,y_1) \geq d(a,y_2)$, то

$$|d(x,y_1) - d(a,y_2)| \leq |d(x,y_2) - d(a,y_2)| \leq d(x,a) < \varepsilon$$

Якщо ж $d(x,y_1) < d(a,y_2)$, то

$$|d(a,y_2) - d(x,y_1)| \leq |d(a,y_1) - d(x,y_1)| \leq d(x,a) < \varepsilon$$

Тоді $\exists \delta = \varepsilon : d(x,a) < \delta \implies |d(x,B) - d(a,B)| < \varepsilon$.
Отже, функція $f(x) = d(x,B)$ неперервна, тому досягає інфімума. $\blacksquare$

Задача 158

Аналогічно до попередньої задачі, $d(A,B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} d(x,y) = \inf\limits_{x\in A} d(x,B) = \inf\limits_{y\in B} d(A,y)$, функції $f(x) = d(x,B)$, $g(y) = d(A,y)$ неперервні віповідно на компактах A і B, тому досягають на них своїх інфімумів, звдки

$$\exists x \in A,\ y \in B : d(x,y) = \inf_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x,y) = d(A,B).\blacksquare$$

Задача 159

Нехай X - компактний метричний простір, A - множина першої категорії. Тоді $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, де кожна A_i ніде не щальна. Звідси маємо $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$, де $\mathrm{Int}\overline{\mathrm{A_i}} = \emptyset$.
Далі візьмемо доповнення

$$X \setminus A \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_i}).$$

Кожна множина $X \setminus \overline{A_i}$ щільна в X (бо $\mathrm{Int}\overline{\mathrm{A_i}} = \emptyset$). Відомо, що перетин скінченної кількості щільних відкритих множин - щільна множина. Тому $\bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_i})$, і, відповідно, $X \setminus A$ - скрізь щільна множина.$\blacksquare$

Задача 160

Скористаємось критерієм компактності в ℓ_2 (задача 153). Для цього доведемо, що множина $B = \{x \in \ell_2 : |x_n| \leq \alpha_n\}$ замкнена і обмежена, та

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in B \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2 < \varepsilon$$

Почнемо з останньої нерівності. З того, що $(\alpha_n) \in \ell_2$ маємо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$, звідки $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i^2 < \varepsilon$, а так як за побудовою $\forall x \in B \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2 \leq \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i^2$, то маємо $\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2 < \varepsilon$.
З формули, що визначає метрику (а, отже, і норму) в ℓ_2 слідує, що для всіх $x \in B$ маємо $\|x\|_2 \leq \|\alpha\|_2$, а отже B - очевидно обмежена.
Для доведення замкнености розглянемо неперервний лінійний функціонал $f_n : \ell_2 \to \mathbb{R} : x \mapsto x_n$. З того, що $|f_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|_2$ для всіх $x \in \ell_2$, f_n неперервна і очевидно лінійна. Звідси $f_n^{-1}([-\alpha_n, \alpha_n])$ - замкнена множина, як прообраз замкненої множини. Також маємо, що

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-a_n, a_n])$$

Отже C - замкнена, як перетин замкнених множин. $\blacksquare$

Задача 161

Аналогічно до попередньої задачі, скористаємося критерієм компактності в ℓ_2.
Так як $\alpha_n > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leq 1$ знакосталий, тому $x_n^2 \leq \frac{1}{\alpha_n}$ для довільного

$x \in E$, а тому E - обмежена множина.

Виберемо послідовність $(x^m) \subset E$, для кожного $m \in \mathbb{N}$ виконується $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^{m2} \leq 1$, а тому якщо $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^m$, то також і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n {x_n}^2 \leq 1$, звідки $x \in E$. Отже, E - замкнена множина.

$\alpha_n \to \infty \implies \exists N_1 : \forall n > N_1\ \alpha_n > 1$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leq 1 \implies \sum_{n=N_1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 + \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n x_n^2 = \sum_{n=N_1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 + \beta \leq 1 \implies \sum_{n=N_1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leq 1 - \beta \implies$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \sum\limits_{n=N}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leq \varepsilon$, а так як $\alpha_n > 1$, то $\sum\limits_{n=N}^{\infty} x_n^2 \leq \varepsilon$.$\blacksquare$