Функціональний аналіз
Домашня робота

Кєльса Данило
група К-22

5 квітня 2020 р.

Задача 133

Доведемо спочатку, що якщо підпростір метричного простору замкнений, то він є повним метричним простором.
Нехай (x_n) - фундаментальна послідовність в підпросторі A? тоді вона фундаментальна в просторі X. Він є повним, тоді $x_n \to x$ для деякого $x \in X$. A - замкнена множина, тоді $x \in A$. Отже, A - повний підпростір.
Але підпростір Y всіх поліномів простору $C([0,1])$ не є замкненим, адже довільну неперервну функцію на $[0,1]$ можна наблизити послідовністю поліномів (наприклад, $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$). Отже, Y не є повним метричним простором.

Задача 134

Нехай (f_n) - фундаментальна послідовність в просторі $B(X)$, тоді $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \in \mathbb{N} :$ $\forall x \in X, \forall n, m \geq k :$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon \tag{1}$$

З цього, маємо фундаментальну послідовність дійсних чисел $(f_n(x))$ для кожного $x \in X$. Покладемо $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R} \; \forall x \in X$. Доведемо, що f - обмежена, тобто $f \in B(X)$, і що $d(f_n, f) \to 0$.
Виберемо $M > 0$ таке, що $|f_k(x) \leq M \; \forall x \in X$, і використаємо (1), щоб отримати

$$|f(x)| \leq \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \leq \varepsilon + M$$

для кожного $x \in X$, тобто $f \in B(X)$. З іншого боку, з (1) випливає

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

для кожного $n \geq k$. Звідси $d(f_n, f) = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ для віх $n \geq k$.
Отже, ми довели, що $(B(X), d)$ - повний метричинй простір. ■

Задача 135

Нехай (X, d) - непорожній метричний простір. Визначимо на ньому функцію f наступним чином:

$$f_x(y) = d(y, x) - d(x_0, y)$$

де точки $x, x_0 \in X$ фіксовані, а точка $y \in X$ довільна. Відомо, що

$$d(y, x) \leq d(y, x_0) + d(x_0, x) \Rightarrow d(y, x) - d(y, x_0) \leq d(x_0, x)$$

$$d(y, x_0) \leq d(x_0, x)8d(x, y) \Rightarrow d(y, x_0) - d(x, y) \leq d(x_0, x)$$

Отже, виконується

$$|d(y, x) - d(x_0, y)| = |f_x(y)| \leq d(x, x_0)$$

тобто для кожного фіксованого $x \in X$ $f_x(y) \in B(X)$, як функція від $y \in X$. Для фіксованих $x_1, x_2 \in X$ виконується

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leq d(x_1, x_2)$$

звідки випливає, що

$$d_{B(X)}(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leq d(x_1, x_2)$$

Покладемо в останній нерівності $y = x_1$, тоді $|f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = d(x_1, x_2)$, тобто $d_{B(X)}(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2)$

Таким чином, встановлена ізометрія між метричним простором (X, d) і частиною метричного простору $B(X)$.■

Задача 136

З попередньої задачі відомо, що метричний простір (X, d) ізометричний деякому підпростору повного метричного простору $B(X)$. Нехай J - відповідна ізометрія. Розглянемо $J(X) \subset B(X)$. Замикання множини $J(X) = \widetilde{B}(X)$ є повним метричним простором. Тоді $\widetilde{B}(X)$ можна взяти за $\widetilde{X}$, бо це повний метричний простір і за побудовою виконується $(J(X), \widetilde{d}) \overset{\text{ds}}{\subset} (\widetilde{X}, \widetilde{d})$.

Далі доведемо, що поповнення єдине з точністю до ізометрії. Нехай існує метрічний простір $(\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$ і ізометрія $J_2 : (X, d) \to (\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$ така, що $(J_2(X), d_2) \overset{\text{ds}}{\subset} (\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$. Тоді, оскільки для довільної ізометрії існує обернена. існує відображення $J_2(J)^{-1} : J(X) \to J_2(X)$,що є ізометрією $J(X)$ на $J_2(X)$. Оскільки $(J(X), d_0) \overset{\text{ds}}{\subset} (\widetilde{B}(X), d_0)$, $(J_2(X), d_2) \overset{\text{ds}}{\subset} (\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$, то ця ізометрія продовжується до ізометрії між $(\widetilde{B}(X), d_0)$ і $(\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$, що і доводить єдиність поповнення з точністю до ізометрії. ■

Задача 137

За умовою $(x_n) \sim (y_n) \iff x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ - фундаментальна. Але тоді

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty$$

бо перший доданок прямує до нуля за фундаментальністю (x_n), а другий - за фундаментальністю $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$
Отже, умову еквівалентності можна замінити на наступну:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

I. Доведемо, що за такого визначення відношення $\sim$ справді є відношенням еквівалентності.
Нехай $(x_n), (y_n), (z_n)$ - довільні фундаментальні послідовності в X.

1) Рефлексивність:
$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_n) = 0$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$. Отже, $(x_n) \sim (x_n)$.

2) Симетричність:
$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n)$.
Отже, з $(x_n) \sim (y_n)$ випливає $(y_n) \sim (x_n)$.

3) Транзитивність:
$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} dx_n, z_n \le \lim\limits_{n\to\infty} dx_n, y_n + \lim\limits_{n\to\infty} dy_n, z_n$.
Отже, з $(x_n) \sim (y_n)$ та $(y_n) \sim (z_n)$ випливає $(x_n) \sim (z_n)$.

II. Доведемо, що $\widetilde{d}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ однозначно визначена на $\widetilde{X}$.
Нехай $(x_n), (\hat{x}_n), (y_n), (\hat{y}_n)$ послідовності такі, що $(x_n) \sim (\hat{x}_n)$, $(y_n) \sim (\hat{y}_n)$. Тоді маємо:

$$d(x_n, y_n) - d(\hat{x}_n, \hat{y}_n) \le d(x_n, \hat{x}_n) + d(\hat{x}_n, y_n) - d(\hat{x}_n, \hat{y}_n) \le$$
$$\le d(x_n, \hat{x}_n) + d(\hat{x}_n, \hat{y}_n) + d(\hat{y}_n, y_n) - d(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = d(x_n, \hat{x}_n) + d(\hat{y}_n, y_n)$$

Аналогічно можна довести, що $d(\hat{x}_n, \hat{y}_n) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, \hat{x}_n) + d(\hat{y}_n, y_n)$, звідки $0 \le |d(x_n, y_n) - d(\hat{x}_n, \hat{y}_n)| \le d(x_n, \hat{x}_n) + d(\hat{y}_n, y_n) \to 0 + 0 = 0$.
Отже, отримаємо $\widetilde{d}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = \widetilde{d}(\hat{x}, \hat{y})$.

III. Доведемо, що $\widetilde{d}$ - метрика на $\widetilde{X}$.

1) $\widetilde{d}(x, x) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$,
$\widetilde{d}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \ge 0$.

2) $\widetilde{d}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \widetilde{d}(y, x)$.

3) $\widetilde{d}(x, z) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \{d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)\} = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = \widetilde{d}(x, y) + \widetilde{d}(y, z)$.

IV. Доведемо, що $\widetilde{X}$ - поповнення X.
Нехай $x \in X$, визначимо $\hat{x} = (x, x, x, \dots)$ - константна послідовність.
Також будемо позначати $[x_n] \in \widetilde{X}$ - клас еквівалентності послідовності $(x_n) \subset X$.
Визначимо $\phi : X \to \widetilde{X} : x = [\hat{x}]$.

1) Доведемо, що $X \subset \widetilde{X}$.
$x, y \in X : \phi(x) = \phi(y) \implies [\hat{x}] = [\hat{y}] \implies \lim\limits_{n \to \infty} d(x, y) = 0 \implies d(x, y) = 0 \implies x = y$.

2) Доведемо, що $\forall x, y \in X : \tilde{d}(x, y) = d(x, y)$.
$\tilde{d}([\hat{x}], [\hat{y}]) = \lim\limits_{n \to \infty} d(x, y) = d(x, y)$.

3) Доведемо, що X всюди щільна в $\widetilde{X}$.
Нехай $[x_n] \in \widetilde{X}$ і виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Якщо ми зможемо знайти таке $x \in X$, що $\widetilde{d}([\hat{x}], [x_n]) < \varepsilon$, то таким чином доведемо, що X щільна в $\widetilde{X}$.
Так як (x_n) - фундаментальна, то $\exists N \in \mathbb{N}$ таке, що:
$\forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$.
Тоді ми маємо $\widetilde{d}([\hat{x}_N], [x_n]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_N, x_n) < \varepsilon$, що і доводить щільність.

4) Доведемо, що $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ - повний простір.
Для цього достатньо довести, що довільна фундаментальна послідовність в $\phi(X)$ є збіжною в $\widetilde{X}$.
Нехай $\langle \hat{w}_n \rangle$ - фундаментальна послідовність в $\phi(X)$, що має вигляд $\langle w_n, w_n, w_n, \dots \rangle$.
Так як ϕ - ізометрія, маємо:
$\forall m, n \in$: $\widetilde{d}(\hat{w}_n, \hat{w}_m) = d(w_n, w_m)$, звідки $\langle w_1, w_2, w_3, \dots \rangle$ - фундаментальна в X. Нехай $W = [\langle w_1, w_2, w_3, \dots \rangle] \in \widetilde{X}$. Доведемо, що $\langle \hat{w}_n \rangle$ збігається до W в $\widetilde{X}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : d(w_n, w_m) < \varepsilon.$$

Тоді

$$\forall n > N : \widetilde{d}(w_n, W) = \lim_{n\to\infty} d(w_n, W) < \varepsilon.$$

Звідки $\langle \hat{w}_n \rangle \to W$ при $N \to \infty$, що і доводить повноту $\widetilde{X}$.■