# Функціональний аналіз
# Домашня робота

Кєльса Данило
група К-22

28 березня 2020 р.

## Задача 114

$B = B(0,1) = \{x \in \ell^2 : d(x,0) < 1\}$ - одинична куля, визначимо $x_n \in \ell^2 : x_n = (0, \dots \frac{1}{2}, 0, \dots)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ - зліченна кількість елементів з $\ell^2$, кожен з яких на $n$-тому місці містить $\frac{1}{2}$. Побудуємо зліченну кількість куль $B_n = B_n(x_n, \frac{1}{2}) = \{x \in \ell^2 : d(x, x_n) < \frac{1}{4}\}$. Доведемо, що вони містяться у $B$ та попарно не перетинаються.

$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m : d(x_n, x_m) = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. З іншого боку,
$\forall x \in B_n,\ y \in B_m : d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, x_m) \leq \frac{1}{4} + d(x,y) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$, тоді з довільності точок $x$ та $y$ випливає, що $B_n \cap B_m = \emptyset$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in B_n : d(x,0) \leq d(x, x_n) + d(x_n, 0) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1$, тому всі кулі $B_n \subset B$.$\blacksquare$

## Задача 115

$(x_n) \subset X$ - фундаментальна послідовність в метричному просторі, $\exists (x_{nk}) \subset (x_n)$, $x_{nk} \to x_0$. Тоді за означенням $\forall n, m \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) \to 0,\ n, m \to \infty$, і також $\exists (n_k) \subset \mathbb{N} : d(x_{n_k}, x_0) \to 0,\ n_k \to \infty$.
Тоді $\forall n, k \in \mathbb{N} : d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \to 0,\ n, k \to \infty$, бо кожен доданок прямує до нуля. $\blacksquare$

## Задача 116

Нехай $x_n \not\to x_0$, тоді за означенням

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : d(x_n, x_0) \geq \varepsilon$$

Тоді для довільного фіксованого $N_k \in \mathbb{N}$ виберемо $n_k \geq N_k : d(x_{n_k}, x_0) \geq \varepsilon$. Побудована підпослідовність $(x_{n_k})$ не містить елементів, що належали б $\varepsilon$-околу послідовності $x_n$, тому з неї неможливо виділити збіжну підпослідовність $(x_{n_{k_l}})$, що суперечить умові. $\blacksquare$

## Задача 117

Відомо, що $d(x_n, x_{n+2}) \leq \frac{1}{n^2}$, $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. Потрібно показати, що $\forall n, m \in \mathbb{N}$ : $d(x_n, x_m) \to 0$, $n, m \to \infty$.
Нехай $m > n$, тоді можливі два випадки:

1) $m = n + 2k$. Тоді

$$d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+2k}) \leq d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+4}) + \ldots + d(x_{n+2k-2}, x_{n+2k}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2k-2)^2} \to 0, n \to \infty$$

2) $m = n + 2k + 1$. Тоді

$$d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+2k+1}) \leq d(x_n, x_{n+2k}) + d(x_{n+2k}, x_{n+2k+1}) \to 0, n \to \infty$$

бо $d(x_n, x_{n+2k}) \to 0$ за п.1, а $d(x_{n+2k}, x_{n+2k+1}) \to 0$ за умовою. ■

## Задача 118

Розглянемо простір $\mathbb{R}$ зі звичною метрикою $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$. Побудуємо послідовність $(x_n)$, де $x_n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Для неї виконуються умови задачі:

$$d(x_n, x_{n+2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$$d(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \to 0, n \to \infty$$

Але ця послідовність не є фундаментальною, бо $n, m \in \mathbb{N}, m > n : d(x_n, x_m) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{1}{k}$, і якщо спрямувати $m \to \infty$, то $d(x_n, x_m) \to \infty \neq 0$.■