17. Теорема про ізоморфізм

Обравши в n-вимірному евклідовому просторі ортогональний нормований базис $e_1, e_2, ..., e_n$, можна кожний вектор $x \in R^n$ записати у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \,, \tag{1}$$

де

$$c_k = (x, e_k).$$

Постає питання, як узагальнити цей розклад на випадок нескінченновимірного евклідова простору. Введемо наступні поняття.

Озн. 17.1. *Система ненульових векторів* $\{e_k\} \subset E$ *називається* ***ортогональною****, якщо*

$$(e_k, e_l) = 0 \text{ при } k \neq l.$$

Озн. 17.2. *Система* $\{e_k\} \subset E$, *елементи якої задовольняють умову*

$$(e_k, e_l) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k \neq l, \\ 1, \text{ якщо } k = l \end{cases}$$

називається ***ортонормованою***.

Нагадаємо означення із теорії лінійних просторів.

Озн. 17.3. *Найменший лінійний підпростір, що містить множину* A *у лінійному просторі* X, *називається* ***лінійною оболонкою*** *множини* A, *або* ***лінійним підпростором, що породжений множиною*** A. *Цей підпростір позначається як* $\text{span}\, A$.

Зауваження 17.1. Лінійна оболонка *лінійної* множини A є замкненою, але якщо множина A є довільною, це не обов'язково так. В той же час у *нормованих* просторах підпростори є замкненими за означенням, тому лінійна оболонка множини в нормованому просторі є замкненою.

Озн. 17.4. *Система* $\{e_k\} \subset E$ *називається* ***повною***, *якщо її лінійна оболонка є скрізь щільною в E, тобто* $\overline{span\{e_k\}} = E$.

Озн. 17.5. *Повна ортонормована система* $\{e_k\} \subset E$ *називається* ***ортонормованим базисом***.

Приклад 17.1. В просторі l_2 ортонормований базис утворюють послідовності $e_i = \left(0,...,0,\underbrace{1}_{i-тий},0,...,0,...\right)$.

Скалярний добуток: $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Приклад 17.2. В просторі $C_2(a,b)$ ортонормований базис утворюють вектори

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi t}{b-a}, \sin\frac{2\pi t}{b-a}, ..., \cos n\frac{2\pi t}{b-a}, \sin n\frac{2\pi t}{b-a}, ...$$

Скалярний добуток: $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt$.

Лема 17.1. *В сепарабельному евклідовому просторі будь-яка ортогональна система є не більш ніж зліченною.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо ортонормовану систему $\{\varphi_k\} \subset E$. Тоді

$$\|\varphi_k-\varphi_l\|=\sqrt{(\varphi_k-\varphi_l,\varphi_k-\varphi_l)}=$$
$$=\sqrt{(\varphi_k,\varphi_k)-2(\varphi_k,\varphi_l)+(\varphi_l,\varphi_l)}=$$
$$=\sqrt{(\varphi_k,\varphi_k)+(\varphi_l,\varphi_l)}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Розглянемо сукупність куль $S\left(\varphi_k,\frac{1}{2}\right)$. Ці кулі не перетинаються. Якщо зліченна множина $\{\psi_k\}$ є скрізь щільною в E, то в кожну кулю потрапить принаймні один елемент ψ_k. Отже, потужність множини таких куль не може перевищувати потужність зліченої множини. ■

Озн. 17.6. *Ортонормована система* $\{\varphi_k\}\subset E$ *називається* ***замкненою****, якщо для довільного* $f\in E$ *виконується рівність Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2. \tag{2}$$

Озн. 17.6. *Нехай* $\{\varphi_k\}\subset E$ *— ортонормована система в евклідовому просторі, а* f *— довільний елемент із Е. Поставимо у відповідність елементу* $f\in E$ *послідовність чисел*

$$c_k=(f,\varphi_k),\ k=1,2,...$$

Числа c_k *називаються* ***координатами****, або* ***коефіцієнтами Фур'є*** *елемента* f *по системі* $\{\varphi_k\}\in E$ *, а ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$$

називається ***рядом Фур'є*** *елемента* f *по системі* $\{\varphi_k\} \in E$.

Теорема 17.1. *Ряд Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли система* $\{\varphi_k\} \in E$ *є замкненою.*

Доведення. Розглянемо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

і для заданого числа n відшукаємо коефіцієнти α_k, що мінімізують $\| f - S_n \|^2$.

$$\| f - S_n \|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k , f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= \| f \|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 .$$

Мінімум цього виразу досягається тоді, коли останній член дорівнює нулю, тобто, коли

$$\alpha_k = c_k ,\ k = 1, 2, ..., n .$$

В цьому випадку

$$\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 . \qquad (3)$$

Оскільки $\| f - S_n \|^2 \geq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \| f \|^2 .$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо нерівністю Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \| f \|^2 . \qquad (4)$$

Із тотожності (3) випливає, що рід Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли виконується рівність Парсеваля, тобто система є замкненою. ■

Теорема 17.2. *В сепарабельному евклідовому просторі E будь-яка повна ортонормована система є замкненою, і навпаки.*

Доведення. Необхідність. Нехай система $\{\varphi_k\} \subset E$ є замкненою. Тоді за теоремою 17.1 для довільного елемента $f \in E$ послідовність часткових сум його ряду Фур'є збігається до f. Це означає, що $\overline{span\{\varphi_k\}} = E$, тобто система $\{\varphi_k\}$ є повною.

Достатність. Нехай система $\{\varphi_k\}$ є повною, тобто довільний елемент $f \in E$ можна скільки завгодно точно апроксимувати лінійною комбінацією $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ елементів системи $\{\varphi_k\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k : \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon .$$

За теоремою 17.1 елементом найкращого наближення серед усіх сум вигляду $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ є ряд Фур'є. Отже, цей ряд збігається, а, значить, виконується рівність Парсеваля, тобто система $\{\varphi_k\}$ є замкненою.■

Теорема Рісса–Фішера. *Нехай* $\{\varphi_k\} \subset E$ *— довільна ортонормована система в гільбертовому просторі E, а числа* $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ *є такими, що ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ *є збіжним. Тоді існує такий елемент* $f \in E$*, такий що* $c_k = (f, \varphi_k)$ *і* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2$.

Доведення. Розглянемо суму

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k .$$

Тоді,

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + ... + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ є збіжним, а простір E — повним, послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякого елемента $f \in E$. Оцінимо наступний скалярний добуток.

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i).$$

При $n \geq i$ перший доданок дорівнює c_i, а другий доданок при $n \to \infty$ прямує до нуля, оскільки

$$\left|\left(f-f_n,\varphi_i\right)\right|\le\|f-f_n\|\|\varphi_i\|.$$

Ліва частина рівності від n не залежить. Переходячи до границі при $n\to\infty$, доходимо висновку, що

$$\left(f,\varphi_i\right)=c_i.$$

Оскільки за означенням елемента f

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0,$$

то

$$\left(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k,\,f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right)=\left(f,f\right)-\sum_{k=1}^{n}c_k^2\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\left(f,f\right).$$

Теорема про ізоморфізм. *Довільні два сепарабельних гільбертових простора є ізоморфними один до одного.*

Доведення. Покажемо, що кожний гільбертів паростір H є ізоморфним простору l_2. Це доведе теорему про ізоморфізм.

Виберемо в H довільну повну ортонормовану систему $\{\varphi_k\}\subset H$ і поставимо у відповідність елементу $f\in H$ сукупність його коефіцієнтів Фур'є за цією системою $c_1,c_2,...,c_n,...$. Оскільки $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\infty$, то послідовність $\{c_1,c_2,...,c_n,...\}$ належить l_2. І навпаки, за теоремою Рісса–Фішера довільному елементу $\{c_1,c_2,...,c_n,...\}\in l_2$ відповідає деякий елемент $f\in H$, у якого числа

$c_1, c_2, ..., c_n, ...$ є коефіцієнтами Фур'є за системою $\{\varphi_k\} \subset E$. Ця відповідність є взаємно-однозначною. Крім того, якщо

$$f \leftrightarrow \{c_1, c_2, ..., c_n, ...\},$$

і

$$g \leftrightarrow \{d_1, d_2, ..., d_n, ...\},$$

то

$$f + g \leftrightarrow \{c_1 + d_1, c_2 + d_2, ..., c_n + d_n, ...\}$$

і

$$\alpha f \leftrightarrow \{\alpha c_1, \alpha c_2, ..., \alpha c_n, ...\}.$$

Крім того, із рівності Парсеваля випливає, що

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \ (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2,$$

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2.$$

Отже,

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k .$$

Таким чином, установлена відповідність між елементами просторів H і l_2 є ізоморфізмом. ■

Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 149–157.