16. Гільбертові простори

Озн. 16.1. *Дійсна лінійна система H називається* **дійсним передгільбертовим простором** (або **евклідовим**, або **унітарним**), *якщо кожній парі елементів* x, y *поставлено у відповідність дійсне число* (x, y), *що задовольняє умови (аксіоми скалярного добутку):*

1. $(x, x) \geq 0$, *до того ж* $(x, x) = 0$ *тільки при* $x = 0$;
2. $(x, y) = (y, x)$;
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$.

Лема 16.1. *В дійсному передгільбертовому просторі має місце нерівність Коші-Буняковського*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)},$$

для довільних $x, y \in H$.

Доведення. Розглянемо вираз

$$(x + \lambda x, x + \lambda x) = (x, x) + 2\lambda (x, y) + \lambda^2 (y, y) \geq 0$$

Це означає, що дискримінант цього квадратного трьохчлена є недодатним:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Отже,

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \blacksquare$$

За скалярним добутком в H можна ввести норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Лема 16.2. *Відображення* $\|\cdot\|: x \to \sqrt{(x,x)}$ *є нормою.*

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.

1. $\forall x \in H \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$\sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \ \ \forall x \in H, \lambda \in R^1$.

$\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$

.

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in H$

$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$

$\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

■

Лема 16.3. *Скалярний добуток є неперервним відображенням, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x,y).$$

Доведення.

$$|(x,y) - (x_n,y_n)| = |(x,y) - (x,y_n) + (x,y_n) - (x_n,y_n)| =$$

$$= |(x, y-y_n) + (x-x_n, y_n)| \le |(x, y-y_n)| + |(x-x_n, y_n)| \le$$

$$\le \|x\| \cdot \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \cdot \|y_n\|$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \;\Rightarrow\; \exists C > 0 : \forall n \;\; \|y_n\| \le C .$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|(x,y)-(x_n,y_n)\right| \le 0 \;\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y) .\blacksquare$$

Характеристична властивість передгільбертових просторів. *Для того щоб нормований простір E був передгильбертовим необхідно і достатньо, щоб для довільних елементів x і y виконувалась рівність*

$$\forall x, y \in H \;\; \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \qquad (1)$$

Доведення. Необхідність.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y) =$$

$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Достатність. Нехай рівність (1) виконується. Покладемо

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \qquad (2)$$

Покажемо, що рівність (2) виконується, то функція (2) задовольняє всім аксіомам скалярного добутку.

Оскільки при $x = y$ маємо

$$(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 + \|x-x\|^2\right) = \|x\|^2,$$

за допомогою такого скалярного добутку можна задати норму в просторі E.

Властивість 1 (невід'ємність). Оскільки

$$(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 + \|x-x\|^2\right) = \|x\|^2 \ge 0.$$

Властивість 2 (симетричність). Ця аксіома виконана, оскільки

$$(x, y) = (y, x).$$

Властивість 3 (адитивність). Для перевірки цієї аксіоми розглянемо функцію, що залежить від трьох векторів.

$$\Phi(x, y, z) = 4\left[(x + y, z) - (x, z) - (y, z)\right].$$

Покажемо, що ця функція тотожно дорівнює нулю.

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) = \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 - \\ - \|x + z\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Із рівності (1) випливає, що

$$\|x + y \pm z\|^2 = 2\|x \pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x \pm z - y\|^2.$$

Підставляючи цю рівність в (3), маємо

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) = -\|x + y - z\|^2 + \|x - y - z\|^2 + \\ + \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Обчислимо напівсуму виразів (3) і (4).

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\|y + z + x\|^2 + \|y + z - x\|^2 + \\ - \frac{1}{2}\|y - z + x\|^2 + \|y - z - x\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2.\end{aligned}$$

Внаслідок (1) перший член дорівнює

$$\|y + z\|^2 + \|x\|,$$

а другий —

$$-\|y - z\|^2 - \|x\|.$$

Отже,

$$\Phi(x, y, z) \equiv 0.$$

Властивість 4 (однорідність). Розглянемо функцію

$$\varphi(c) = (cx, y) - c(x, y).$$

Із рівності (2) випливає, що

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}\left(\|g\|^2 - \|g\|^2\right) = 0,$$

а, оскільки $(-x, y) = -(x, y)$, то

$$\varphi(-1) = 0.$$

Отже, для довільного цілого числа n

$$(nx, y) = (\operatorname{sgn} n(x + x + \ldots + x), y) =$$
$$= \operatorname{sgn} n\left[(x, y) + (x, y) + \ldots + (x, y)\right] =$$
$$= |n| \operatorname{sgn} n(x, y) = n(x, y).$$

Таким чином,

$$\varphi(n) = 0.$$

При цілих p, q і $q \neq 0$ маємо

$$\left(\frac{p}{q}x, y\right) = p\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}q\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}(x, y).$$

Отже, $\varphi(c) = 0$ при всіх раціональних числах c. Оскільки функція φ є неперервною, з цього випливає, що

$$\varphi(c) \equiv 0.$$

Озн. 16.2. *Повний передгільбертів простір* H *називається* ***гільбертовим***.

Приклад 16.1. Простір l_2 із скалярним добутком $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i$ і нормою $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}$ є гільбертовим.

Приклад 16.2. Простір $C_2[a,b]$ із скалярним добутком $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$ і нормою $\|x\|=\sqrt{\int_a^b x(t)y(t)dt}$ є гільбертовим.

Приклад 16.3. Простір $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ з нормою $\|x\|=\max_{t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}|x(t)|$ не є передгільбертовим — в ньому не виконується основна характеристична властивість. Нехай $x(t)=\sin t$ і $y(t)=\cos t$. Оскільки $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x+y\|=\sqrt{2}$, $\|x-y\|=1$, то

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=1+2\neq 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=2(1+1)=4$$

.

Гільбертів простір є банаховим. Отже, на нього переносяться всі попередні означення і факти.

Озн. 16.1. *Елементи x і y гільбертова простору називаються* ***ортогональними****, якщо* $(x,y)=0$. *Цей факт записується як* $x\perp y$.

Озн. 16.2. *Якщо фіксований елемент* $x\in H$ *є ортогональним до кожного елемента деякої множини* $E\subset H$, *говорять, що елемент x є* ***ортогональним множині*** *E. Цей факт позначається як* $x\perp E$.

Озн. 16.3. *Сукупність усіх елементів, ортогональних до даної множини $E \subset H$ є підпростором простору H. Цей підпростір називається* ***ортогональним доповненням*** *множини E.*

Теорема Релліха. *Нехай H_1— підпростір гільбертова простору H і H_2 — його ортогональне доповнення. Будь-який елемент $x \in H$ можна єдиним способом подати у вигляді*

$$x = x' + x'',\ x' \in H_1,\ x'' \in H_2. \tag{1}$$

До того ж елемент x' реалізує відстань від x до H_1, тобто

$$\|x - x'\| = \rho(x, H_1) = \inf_{y \in H_1} \rho(x, y). \tag{2}$$

Доведення. Позначимо $d = \rho(x, H_1)$. За означенням точної нижньої грані $\inf\limits_{y \in H_1} \rho(x, y)$ існують елементи $x_n \in H_1$ такі, що

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2},\ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Застосуємо лему 16.4 до елементів $x - x_n$ і $x - x_m$:

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2\right). \tag{4}$$

Оскільки $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in H_1$,

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geq 4d^2. \tag{5}$$

Отже,

$$\left\| x_n - x_m \right\|^2 \le 2\left(d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2} \right) - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким чином, послідовність $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки H — повний простір, $\exists x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В гільбертовому просторі будь-який підпростір є замкненою лінійною множиною, отже $x' \in H_1$.

Перейдемо до границі в нерівності (3). Отримаємо, що

$$\left\| x - x' \right\| \le d. \tag{6}$$

З іншого боку,

$$\forall y \in H_1 \ \left\| x - y \right\| \ge d \Rightarrow \left\| x - x' \right\| \ge d. \tag{7}$$

Порівнюючи нерівності (6) і (7), доходимо висновку, що

$$\left\| x - x' \right\| = d.$$

Доведемо твердження:

$$x'' = x - x' \perp H_1 \Rightarrow x'' \in H_2.$$

Візьмемо $y \in H_1,\ y \ne 0$. Тоді

$$\forall \lambda \in R^1 \ \ x' + \lambda y \in H_1 \Rightarrow \left\| x'' - \lambda y \right\|^2 = \left\| x - \left(x' + \lambda y \right) \right\|^2 \ge d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x'' - \lambda y, x'' - \lambda y \right) = \left(x'', x'' \right) - \lambda \left(x'', y \right) - \lambda \left(y, x'' \right) + \lambda^2 \left(y, y \right) =$$

$$= d^2 - \lambda \left(x'', y \right) - \lambda \left(y, x'' \right) + \lambda^2 \left(y, y \right) \ge d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda \left(x'', y \right) - \lambda \left(y, x'' \right) + \lambda^2 \left(y, y \right) \ge 0.$$

Покладемо $\lambda = \dfrac{\left(x'', y \right)}{\left(y, y \right)}$. Тоді

$$-\frac{(x'',y)^2}{(y,y)}-\frac{(x'',y)^2}{(y,y)}+\frac{(x'',y)^2}{(y,y)}\geq 0\Rightarrow (x'',y)^2\leq 0.$$

Це можливо лише тоді, коли

$$(x'',y)=0\Rightarrow x''\perp y.$$

Доведемо тепер єдиність подання (1). Припустимо, що існують два подання:

$x=x'+x'',\ x'\in H_1,\ x''\in H_2$ і

$x=x_1'+x_1'',\ x_1'\in H_1,\ x_1''\in H_2$.

З цього випливає, що

$$x'-x_1'=x_1''-x'',\ x'-x_1'\in H_1, x_1''-x''\in H_2$$

$$\Rightarrow x'-x_1'\perp x_1''-x''\Rightarrow$$

$\Rightarrow x'-x_1'=x_1''-x''=0$. ■

Озн. 16.4. *Елементи* x' *і* x'', *які однозначно визначаються елементом* $x=x'+x''$, *називаються* ***проекціями*** *елемента* x *на підпростори* H_1 *і* H_2 *відповідно.*

Теорема Рісса. *Якщо* $f\in H^*$, *то існує єдиний елемент* $y(f)\in H$, *такий що* $f(x)=(x,y)$ *для довільного* $x\in H$, *та* $\|f\|_{H^*}=\|y\|_H$.

Доведення. Спочатку доведемо існування елемента y. Позначимо через $H_0=Ker\ f$ множину тих елементів $x\in H$, які функціонал f відображає в нуль:

$$\forall x\in H_0\ f(x)=0.$$

Оскільки $f \in H^*$, він є лінійним і неперервним, отже, $H_0 = Ker\ f$ — підпростір, тобто замкнена лінійна множина. Якщо $H_0 = H$, покладемо $y = 0$.

Розглянемо випадок, коли $H_0 \neq H$. Нехай $y_0 \in H \setminus H_0$. За теоремою Релліха подамо його у вигляді

$$y_0 = y' + y'', y' \in H_0, y'' \perp H_0.$$

Якщо $y'' \neq 0$, то $f(y'') \neq 0$. Значить, можна покласти

$$f(y'') = 1$$

(інакше ми могли б взяти замість y'' елемент $\dfrac{y''}{f(y'')}$).

Виберемо довільний елемент $x \in H$ і позначимо $f(x) = \alpha$. Розглянемо елемент $x' = x - \alpha y''$. Тоді

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Отже,

$$x' \in H_0 \Rightarrow (x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha (y'', y'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right) \Rightarrow y = \frac{y''}{(y'', y'')}.$$

Доведемо єдиність цього елемента. Дійсно, якщо

$$\forall x \in H\ \exists y, y_1 \in H\ (x, y) = (x, y_1),$$

то

$$(x, y - y_1) = 0 \Rightarrow y - y_1 \perp H \Rightarrow y = y_1.$$

Оцінимо норму функціонала.

$$|f(y)| \leq \|f\| \|y\| \Rightarrow \|f\| \geq f\left(\frac{y}{\|y\|} \right) = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|.$$

З іншого боку,

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|\left(x,y\right)\right|\le\|x\|\cdot\|y\|\Rightarrow\|f\|\le\|y\|.\blacksquare$$

Зауваження. З теореми Рісса випливає, що між гільбертовим простором H і спряженим простором H^* існує ізоморфізм, і скалярні добутки вичерпують весь запас функціоналів, які можна задати на просторі H .

Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 143–147.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: 1977. — с. 160–167, 197–198.