

15. Спряжені оператори, спектр і компактні оператори

Нехай E і F — лінійні топологічні простори. Розглянемо неперервний лінійний оператор $A: E \rightarrow F$ і функціонал $g \in F^*$. Застосуємо функціонал g до елемента $y = Ax$. Це визначає функціонал $f \in E^*$, який визначається формулою $f(x) = g(Ax)$.

Озн. 15.1. Оператор $A^*: F^* \rightarrow E^*$, що визначається формулою $f(x) = g(Ax)$ і ставить кожному функціоналу g із простору F^* функціонал f із простору E^* , називається *спряженим* до оператора A .

Приклад 15.1. Розглянемо оператор

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

і функціонал

$$y = Ax,$$

який визначається як

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Тоді

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^m g_i y_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m g_i a_{ij}.$$

Отже,

$$f_j = \sum_{i=1}^m g_i a_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

З цього випливає, що

$$f = A^* g \Rightarrow A^* = A^T.$$

Це означає, що спряжений оператор визначається транспонованою матрицею. ■

Позначивши значення функціонала f на елементі x символом (f, x) , отримаємо, що

$$(g, Ax) = (f, x) = (A^* g, x).$$

Теорема 15.1. Якщо $A \in \mathcal{L}(E, F)$, де E, F — банахові простори, то $\|A\| = \|A^*\|$.

Доведення. З одного боку

$$\begin{aligned} |(A^* g, x)| &= |(g, Ax)| \leq \|g\| \|Ax\| \Rightarrow \|A^* g\| \leq \|A\| \|g\| \\ &\Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|. \end{aligned}$$

З іншого боку, для $x \in E$ і $Ax \neq 0$ існує елемент

$$y_0 = \frac{\overset{def}{Ax}}{\|Ax\|} \in F \Rightarrow \|y_0\| = 1.$$

Отже, за теоремою Хана-Банаха існує функціонал g , такий що $\|g\| = 1$, $(g, y_0) = 1$. З цього випливає, що

$$(g, y_0) = \left(g, \frac{Ax}{\|Ax\|} \right) = \frac{1}{\|Ax\|} (g, Ax) = 1.$$

Тоді

$$(g, Ax) = \|Ax\|.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} (g, Ax) = \|Ax\| &= |(A^* g, x)| \leq \|A^*\| \|g\| \|x\| = \|A^*\| \|x\| \Rightarrow \\ \|A\| &\leq \|A^*\|. \end{aligned}$$

З цього випливає, що $\|A\| = \|A^*\|$. ■

Озн. 15.2. Нехай $A: E \rightarrow E$, де E — комплексний банахів простір. Число λ називається **регулярним** для оператора A , якщо оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ визначений на всьому просторі E .

Озн. 15.3. Оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ називається **резольвентою**.

Озн. 15.4. Сукупність всіх чисел λ , які не є регулярними для оператора A , називається його **спектром**.

Озн. 15.5. Число λ , таке що рівняння

$$Ax = \lambda x$$

має ненульові розв'язки, називається **власним числом** оператора A .

Озн. 15.6. Всі власні числа оператора A належать його спектру і утворюють **точковий спектр**.

Озн. 15.7. Доповнення до точкового спектру називається **неперервним спектром**.

Приклад 15.2. Розглянемо простір $C[a, b]$ і оператор

$$Ax(t) = tx(t).$$

Тоді

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t).$$

Із умови

$$(t - \lambda)x(t) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

випливає, що неперервна функція $x(t)$ тотожно дорівнює нулю, тому оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ існує для довільного λ .

Проте при $\lambda \in [a, b]$ обернений оператор, що діє за формулою

$$(A - \lambda I)^{-1} x(t) = \frac{1}{t - \lambda} x(t)$$

визначений не на всьому просторі $C[a, b]$ і не є обмеженим. Таким чином, спектром є весь відрізок $[a, b]$, власних чисел немає, тобто оператор A має лише неперервний спектр.

Зауваження 15.1. У скінченновимірних просторах неперервний спектр оператора є порожньою множиною, спектр збігається із точковим спектром і складається лише із власних чисел. У нескінченновимірних просторах кожне число відносно оператора є регулярним значенням, власним значенням або елементом точкового спектру.

Теорема 15.2. Якщо $A \in \mathcal{L}(E, E)$, де E — банахів простір і $|\lambda| > \|A\|$, то λ — регулярне значення для оператора A .

Доведення. Оскільки

$$A - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right),$$

то

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}.$$

За умови $|\lambda| > \|A\|$ цей ряд збігається і визначає на E обмежений оператор (теорема 14.4). ■

Зауваження 15.2. З теореми 15.2 випливає, що спектр оператора A міститься в колі радіусу $\|A\|$ з центром в нулі.

Озн. 15.8. Оператор A , що діє із банахового простору E в банахів простір F називається **компактним**, або **цілком неперервним**, якщо кожен обмежену множину він переводить у відносно компактну множину.

Приклад 15.2. Лінійний неперервний оператор A , що переводить банахів простір E в його скінченновимірний підпростір, є компактним.

Теорема 15.3. Якщо послідовність компактних операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховому просторі E збігається до оператора A рівномірно, то оператор A теж є компактним.

Доведення. Для доведення компактності оператора A доведемо, що для будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ із послідовності $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність.

Оператор A_1 — компактний, тому із послідовності $\{A_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із $\{A_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Оператор A_2 — компактний, тому із послідовності $\{A_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із $\{A_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$.

Продовжимо цей процес і виділимо діагональну послідовність

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots$$

Оператори $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ переводять її у збіжну послідовність. Покажемо, що оператор A теж переводить її в збіжну послідовність. Простір E — повний, тому достатньо показати, що $\{Ax_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю.

$$\begin{aligned} & \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \leq \\ & \leq \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)} + A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} + A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\| \leq \\ & \leq \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + \|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\| \end{aligned}$$

Нехай $\|x_n\| \leq C$. Оскільки $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K \quad \|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Крім того, оскільки послідовність $\{A_k x_n^{(n)}\}$ є збіжною,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \quad \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Вибравши $M = \max(K, N)$, отримуємо

$$\forall n, m \geq M \quad \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| < \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 15.4. Якщо A — лінійний компактний оператор, оператор B — лінійний обмежений, то оператори AB і BA є компактними.

Доведення. Якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то BM — обмежена множина, оскільки обмежений оператор переводить будь-яку обмежену множину в обмежену множину. Отже, множина ABM є відносно компактною. Це означає, що оператор AB є компактним. Аналогічно, якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то AM — відносно компактна множина, оскільки компактний оператор переводить будь-яку обмежену множину у відносно компактну множину. Оператор B — неперервний, тому множина BAM є відносно компактною. Це означає, що оператор BA є компактним. ■

Наслідок 15.1. В нескінченновимірному просторі E компактний оператор не може мати обмеженого оберненого оператора.

Теорема 15.4. *Оператор, спряжений до компактного, є компактним.* (Без доведення).

Спряжені, самоспряжені і компактні оператори відіграють особливо важливу роль у гільбертових просторах. Саме на цих поняттях побудована теорія розв'язності операторних рівнянь в гільбертових просторах.

Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 230–250.