14. Принцип відкритості відображення

Лема 14.1. *Нехай* E *і* F *— банахові простори,* $A \in \mathcal{L}(E,F)$, E_n *— множина тих точок* $x \in E$ *, для яких*

$$\|Ax\|_F \le n\|x\|_E \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тоді $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *і принаймні одна із множин* E_n *є всюди щільною в* E.

Доведення. Спочатку пересвідчимось в тому, що

$$\forall x \in E \; \exists n \in N : x \in E_n .$$

Очевидно, що $E_n \neq \varnothing$, оскільки $\forall n \in N \;\; 0 \in E$. Якщо $x \neq 0$, позначимо через n найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$n \ge \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} .$$

Тоді

$$\forall x \in E \; \exists n \in \mathbb{N} : \|Ax\|_F \le n\|x\|_E .$$

Звідси випливає, що

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n .$$

Згідно теореми Бера, банахів простір E не може бути поданий у вигляді не більш ніж зліченного об’єднання ніде не щільних множин. Значить, одна із множин E_{n_0} не є ніде не щільною. Отже, існує відкрита куля $S(x_0, r)$, така що $S(x_0, r) \subset \overline{E}_{n_0}$.

Розглянемо замкнену кулю $\overline{S}(x_1, r_1)$ з центром $x_1 \in E_{n_0}$, таку що

$$\overline{S}(x_1, r_1) \subset S(x_0, r).$$

Візьмемо довільний елемент x з нормою $\|x\| = r_1$. Оскільки

$$\|x_1 + x - x_1\|_E = \|x\|_E = r_1,$$

отримаємо, що $x_1 + x \in \overline{S}(x_1, r_1)$. Отже,

$$\overline{S}(x_1, r_1) \subset \overline{E}_{n_0} \Rightarrow$$

$$\exists \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in S(x_1, r_1) \cap E_{n_0} : y_k \to x_1 + x, k \to \infty.$$

Якщо $x_1 + x \in E_{n_0}$, ця послідовність може бути стаціонарною. Таким чином, $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{y_k - x_1\}_{k=1}^{\infty}$, така що

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k - x_1 = x.$$

Оскільки

$$\|x\|_E = r_1 \text{ і } \|x_k\|_E \le r_1,$$

можна вважати, що

$$\|x_k\|_E \ge \frac{r_1}{2} \quad \forall k \in N. \tag{1}$$

Із умов $y_k \in E_{n_0}$, $x_1 \in E_{n_0}$, $y_k = x_k + x_1$ маємо наступні оцінки

$$\|Ax_k\|_F = \|Ay_k - Ax_1\|_F \le \|Ay_k\|_F + \|Ax_1\|_F \le n_0\left(\|y_k\|_E + \|x_1\|_E\right) \tag{2}$$

$$\|y_k\|_E = \|x_k + x_1\|_E \le \|x_k\|_E + \|x_1\|_E \le r_1 + \|x_1\|_E. \tag{3}$$

Беручи до уваги умову (1) і оцінки (2), (3), маємо

$$\left\| Ax_k \right\|_F \le n_0 \left(r_1 + 2\left\| x_1 \right\|_E \right) \le \frac{2n_0}{r_1} \left(r_1 + 2\left\| x_1 \right\|_E \right) \left\| x_k \right\|_E .$$

Нехай n — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$n \ge \frac{2n_0}{r_1} \left(r_1 + 2\left\| x_1 \right\|_E \right).$$

Тоді

$$\left\| Ax_k \right\|_F \le n \left\| x_k \right\|_E \Rightarrow x_k \in E_n .$$

Таким чином, довільний елемент x, норма якого дорівнює r_1 можна апроксимувати елементами множини E_n.

Нехай $x \in E$ — довільний ненульовий елемент. Розглянемо точку

$$\xi = r_1 \frac{x}{\left\| x \right\|_E}.$$

Вище ми довели, що існує послідовність

$$\left\{ \xi_k \right\}_{k=1}^{\infty} : \xi_k \in E_n , \lim_{k \to \infty} \xi_k = \xi .$$

Тоді

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} \xi_k \frac{\left\| x \right\|_E}{r_1} = x ,$$

$$\left\| Ax_k \right\|_F = \frac{\left\| x \right\|_E}{r_1} \left\| A\xi_k \right\|_F \le \frac{\left\| x \right\|_E}{r_1} n \left\| \xi_k \right\|_E = n \left\| x_k \right\|_E$$

Отже, $x_k \in E_n$ і $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x \ \forall x \in E$. Таким чином, множина E_n скрізь щільна в E. ■

Теорема 14.1 (теорема Банаха про обернений оператор). *Нехай* E *і* F — *банахові простори,* A —

лінійний обмежений взаємно-однозначний оператор, що діє із E *в* F. *Тоді існує лінійний обмежений обернений оператор* $A^{-1}: F \to E$.

Доведення. Покажемо лінійність оберненого оператора. Покладемо $\forall \left(x_1 \in E, x_2 \in E \right) \quad Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$. Внаслідок лінійності оператора A

$$\forall \left(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right) \quad A\left(\alpha x_1 + \beta x_2 \right) = \alpha y_1 + \beta y_2. \tag{4}$$

Оскільки $A^{-1}y_1 = x_1$, $A^{-1}y_2 = x_2$, помножимо ці рівності на α і β відповідно і складемо результати:

$$\alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 = \alpha x_1 + \beta x_2. \tag{5}$$

Із рівності (4) і означення оберненого оператора випливає, що

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2 \right).$$

Беручи до уваги рівність (5), отримуємо

$$A^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2 \right) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2.$$

Отже, оператор A^{-1} є лінійним. Тепер доведемо його обмеженість.

За лемою 14.1 банахів простір F можна подати у вигляді

$$F = \bigcup_k F_k,$$

де F_k — множина таких елементів $y \in F$, для яких

$$\left\| A^{-1}y \right\|_F \le k \left\| y \right\|_E \quad \forall k \in N,$$

до того ж одна із множин F_k скрізь щільна в F. Позначимо цю множину через F_n. Візьмемо довільну точку $y \in F$, а її норму позначимо як $\left\| y \right\|_E = a$. Знайдемо таку точку $y_1 \in F_n$, щоб виконувались нерівності

$$\|y-y_1\|_E \le \frac{a}{2},\ \|y_1\|_E \le a.$$

Такий вибір можливий, оскільки множина $\overline{S}(0,a)\cap F_n$ є щільною в замкненій кулі $\overline{S}(0,a)$ і $y\in \overline{S}(0,a)$. Знайдемо такий елемент $y_2 \in F_n$, щоб виконувались умови

$$\|y-y_1-y_2\|_F \le \frac{a}{2^2},\ \|y_2\|_E \le \frac{a}{2}.$$

Продовжуючи вибір, побудуємо елементи $y_k \in F_n$, такі що

$$\forall k\in N\ \ \|y-(y_1+y_2+\ldots+y_k)\|_F \le \frac{a}{2^k},\ \|y_k\|_F \le \frac{a}{2^{k-1}}.$$

Внаслідок вибору елементів y_k маємо

$$\lim_{m\to\infty}\left\|y-\sum_{k=1}^{m} y_k\right\|_F = 0.$$

Це означає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ збігається до елемента y.

Покладемо $x_k = A^{-1}y_k$. Тоді отримуємо оцінку

$$\|x_k\|_E \le n\|y_k\|_F \le \frac{na}{2^{k-1}}.$$

Оскільки

$$\|v_{k+p}-v_k\|_E=\left\|\sum_{i=k+1}^{k+p}x_i\right\|_E\le\sum_{i=k+1}^{k+p}\|x_i\|_E\le$$

$$\le\sum_{i=k+1}^{\infty}\|x_i\|_E=\sum_{i=k+1}^{\infty}\|x_i\|_E\le\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{na}{2^{i-1}}= \qquad ,$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{na}{2^{i+k-1}}=\frac{na}{2^k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}=\frac{na}{2^k}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{na}{2^{k-1}}.$$

а простір E — повний, послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $v_k=\sum_{i=1}^{k}x_i$ збігається до деякої границі $x\in E$. Отже,

$$x=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}x_i=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\,.$$

Внаслідок лінійності і неперервності оператора A, маємо

$$Ax=A\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}x_i\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}Ax_i=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}y_i=y\,.$$

Звідси отримуємо, що

$$\|A^{-1}y\|_E=\|x\|_E=\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}x_i\right\|_E\le$$

$$\le\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|_E\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{na}{2^{i-1}}=2na=2n\|y\|_E\,.$$

Оскільки y — довільний елемент із простору F, обмеженість оператора A^{-1} доведено. ■

Наслідок 14.1. *Якщо* E *і* F *— банахові простори,* $A\in \mathcal{L}(E,F)$, *то образ будь-якого околу нуля простору* E *містить деякий окіл нуля простору* F.

Теорема 14.2 (принцип відкритості відображення). *Лінійне сюр'єктивне і неперервне відображення банахова простору* E *на банахів простір* F *є відкритим відображенням.*

Доведення. Покажемо, що образ будь-якої відкритої множини простору E є відкритою множиною простору F. Нехай $G\subset E$ — непорожня відкрита множина, $x\in G$, а G_0 — окіл нуля в E, такий що $x+G_0\subset G$. Розглянемо окіл нуля G_1 в просторі F, такий що $G_1\subset AG_0$, який існує завдяки наслідку 14.1. Мають місце включення

$$Ax+G_1\subset Ax+AG_0=A(x+G_0)\subset AG.$$

Оскільки $Ax+G_1$ є околом точки Ax, а x — довільна точка із множини G і $Ax\in AG$, то множина AG разом із кожною своєю точкою містить її деякий окіл Ω. Отже, множина AG є відкритою і відображення A є відкритим. ■

Нехай E,F — банахові простори. Відокремимо в банаховому просторі $\mathcal{L}(E,F)$ множину операторів $\mathfrak{M}(E,F)$, що мають обернений оператор.

Теорема 14.3. *Нехай* $A_0\in\mathfrak{M}(E,F)$, $\Delta\in\mathcal{L}(E,F)$ *і* $\|\Delta\|<\dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$. *Тоді* $A=A_0+\Delta\in\mathfrak{M}(E,F)$.

Доведення. Зафіксуємо довільний $y\in F$ і розглянемо відображення $B:E\to E$, таке що $Bx=A_0^{-1}y-A_0^{-1}\Delta x$.

Оскільки $\|\Delta\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, відображення B є стискаючим. Простір E — банахів, тому існує єдина нерухома точка відображення B

$$x = Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta x,$$

Отже,

$$Ax = A_0 x + \Delta x = y.$$

Якщо існує ще одна точка x', така що $Ax' = y$, то x' також є нерухомою точкою відображення B. Оскільки це відображення має єдину нерухому точку, це означає,що $x' = x$. Отже, для будь-якого $y \in F$ рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок в просторі E. Значить, оператор A має обернений оператор A^{-1}. За теоремою Банаха про обернений оператор A^{-1} є обмеженим. ■

Теорема 14.4. *Нехай* E *— банахів простір,* I *— тотожній оператор, що діє в* E, $A \in \mathcal{L}(E, E)$ і $\|A\| < 1$. *Тоді оператор* $(I - A)^{-1}$ *існує, обмежений и може бути поданий у вигляді*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\|A\| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty.$$

Простір E — банахів, тому із збіжності ряду $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^k\right\|$ випливає, що $\sum_{k=0}^{\infty}A^k \in \mathcal{L}(E,E)$. Для довільного $n\in\mathbb{N}$

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n}A^k=\sum_{k=0}^{n}A^k(I-A)=I-A^{n+1}.$$

Перейдемо до границі при $n\to\infty$ і зважимо на те, що $\left\|A^{n+1}\right\|\le\left\|A\right\|^{n+1}\to 0$. Отже,

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}A^k(I-A)=I.$$

Звідси випливає, що

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k. \blacksquare$$

Література

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. — К.: Выща школа, 1990. — с. 254–255.
2. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа. — К.: Выща школа, 1988. — с. 578-581.
3. Садовничий В.А. Теория операторов. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — с. 102–106.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с.224– 233.