13. Принцип рівномірної обмеженості

В цій лекції ми розглянемо види збіжності послідовностей лінійних неперервних операторів і з’ясуємо, коли простір $\mathcal{L}(E,F)$ є банаховим в розумінні тої чи іншої збіжності.

Озн. 13.1. *Послідовність операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *, що діють із нормованого простору* E *в нормований простір* F *, збігається до оператора* A ***поточково*** *в просторі* $\mathcal{L}(E,F)$ *при* $n \to \infty$ *, якщо* $\forall x \in E \ \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$.

Озн. 13.2. *Послідовність операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *, що діють із нормованого простору* E *в нормований простір* F *, збігається до оператора* A ***рівномірно*** *в просторі* $\mathcal{L}(E,F)$ *при* $n \to \infty$ *, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$

Зауваження 13.1. Якщо $F = \mathbb{R}$, то простір $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ є спряженим простором, поточкова збіжність є аналогом слабкої збіжності в спряженому просторі, а рівномірна збіжність є аналогом сильної збіжності в спряженому просторі.

Лема 13.1. *Якщо послідовність лінійних обмежених операторів* $A_n : E \to F$ *, де* E, F *— нормовані простори, є такою, що послідовність* $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ *є необмеженою, то послідовність* $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ *є необмеженою в будь-якій замкненій кулі.*

Доведення. Припустимо супротивне: послідовність $\left\{\|A_n x\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою в деякій замкненій кулі $\bar{S}\left(x_0, \varepsilon\right)$:

$$\exists\left(\bar{S}\left(x_0, \varepsilon\right), C > 0\right) : \forall n \in N \ \forall x \in \bar{S}\left(x_0, \varepsilon\right) \ \ \|A_n x\|_F \le C.$$

Кожному елементу $\xi \in E$ поставимо у відповідність елемент $x = \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi + x_0$, якщо $\xi \ne 0$. Елементу $\xi = 0$ поставимо у відповідність елемент $x = x_0$.

$$\xi \ne 0 \Rightarrow \|x - x_0\|_E = \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi + x_0 - x_0\right\|_E = \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi\right\|_E = \varepsilon.$$

Це означає, що для довільних $\xi \in E$ всі елементи $x \in \bar{S}\left(x_0, \varepsilon\right)$.

Оцінимо наступну величину (використовуючи допоміжну нерівність $\left|\|x\| - \|y\|\right| \le \|x + y\|$.

$$\left|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\|A_n \xi\|_F - \|A_n x_0\|_F\right| \le \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} A_n \xi + A_n x_0\right\|_F =$$

$$= \left\|A_n\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi + x_0\right)\right\|_F \le C$$

Отже,

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\|A_n \xi\|_F - \|A_n x_0\|_F \le C.$$

Звідси випливає, що

$$\left\|A_n\xi\right\|_F \le \frac{C+\left\|A_n x_0\right\|_F}{\varepsilon}\left\|\xi\right\|_E \le \frac{2C}{\varepsilon}\left\|\xi\right\|_E .$$

Отже,

$$\exists C_1 = \frac{2C}{\varepsilon} > 0 : \forall \xi \in E \;\; \left\|A_n\xi\right\|_E \le C_1\left\|\xi\right\|_E \Rightarrow \left\|A_n\right\| \le C_1 .$$

Отримане протиріччя доводить лему. ■

Теорема 13.1 (Банаха-Штейнгауза). *Нехай послідовність лінійних обмежених операторів* $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{\infty}$*, що відображають банахів простір* E *в нормований простір* F*, поточково збігається до оператора* A *при* $n \to \infty$*. Тоді послідовність* $\left\{\left\|A_n\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ *є обмеженою, оператор* A *є лінійним і неперервним, а* $A_n x \to Ax$ *рівномірно по* n *на кожному компакті* $K \subset E$ *(тобто* n *не залежить від* x).

Доведення. Припустимо, що послідовність $\left\{\left\|A_n\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою. Тоді за лемою 13.1 послідовність $\left\{\left\|A_n x\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою на довільній замкненій кулі $\bar{S}\left(x_0, \varepsilon_0\right)$.

Отже, $\exists (n_1 \in N,\, x_1 \in \bar{S}\left(x_0, \varepsilon_0\right) : \left\|A_{n_1} x_1\right\|_F > 1.$

Оскільки A_{n_1} — неперервний оператор,

$$\exists \bar{S}\left(x_1, \varepsilon_1\right) \subset \bar{S}\left(x_0, \varepsilon_0\right) : \left\|A_{n_1} x\right\|_F > 1 \;\; \forall x \in \bar{S}\left(x_1, \varepsilon_1\right).$$

На кулі $\bar{S}\left(x_1, \varepsilon_1\right)$ послідовність $\left\{\left\|A_n x\right\|_F\right\}_{n=1}^{\infty}$ також є необмеженою. Отже,

$$\exists \bar{S}\left(x_2, \varepsilon_2\right) \subset \bar{S}\left(x_1, \varepsilon_1\right) : \left\|A_{n_2} x\right\|_F > 2 \;\; \forall x \in \bar{S}\left(x_2, \varepsilon_2\right)$$

Нехай $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}$ і $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k \text{ і } \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) \supset \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) \supset \ldots \supset \bar{S}(x_k, \varepsilon_k).$$

Продовжуючи цей процес при $k \to \infty$, отримуємо послідовність вкладених замкнених куль, таких що

$$\left\| A_{n_k} x \right\|_F > k \quad \forall x \in \bar{S}(x_k, \varepsilon_k), \; \varepsilon_k \to 0.$$

Оскільки E — повний простір, за принципом вкладених куль

$$\exists x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S(x_k, \varepsilon_k): \left\| A_{n_k} x^* \right\|_F \geq k \quad \forall k \in N.$$

Звідси випливає, що $\exists x^* \in E$ така, що послідовність $\left\{ A_n x^* \right\}$ не збігається. Це суперечить умові теореми, згідно якої послідовність операторів $\left\{ A_n x \right\}_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається в кожній точці простору E.

Покажемо, що оператор A — лінійний. Оскільки

$$A_n(x+y) = A_n(x) + A_n(y), \; A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x),$$

маємо

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \lim_{n\to\infty} A_n(y) = Ax + Ay,$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n(x) = \lambda Ax.$$

Крім того,

$$\left\| A_n x \right\|_F \leq C \left\| x \right\|_E \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| A_n x \right\|_F = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\|_F = \left\| Ax \right\|_E \leq C \left\| x \right\|_E.$$

Отже, A — лінійний і обмежений, а значить, неперервний.

Нехай $K \subset E$ — компакт, $\varepsilon > 0$. За теоремою Хаусдорфа існує скінчена $\dfrac{\varepsilon}{3C}$-сітка M :

$$\forall x \in K\ \exists x_\alpha \in M : \|x - x_\alpha\|_E < \frac{\varepsilon}{3C},\ \alpha \in \mathfrak{A},$$

де $\mathfrak{A}$ — скінчена множина.

Оскільки послідовність $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається в кожній точці простору E, то вона збігається і в кожній точці сітки M :

$$\forall x_\alpha \in M\ \exists n_\alpha \in N\ \forall n \ge n_\alpha\ \ \|A_n x_\alpha - A x_\alpha\|_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай $n_0 = \max\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} n_\alpha$. Тоді $\forall \left(n \ge n_0,\ x \in S\left(x_\alpha, \dfrac{\varepsilon}{3C} \right) \right)$ (сітка M є скінченою, тому максимум існує)

$$\|A_n x - Ax\|_F \le \|A_n x - A_n x_\alpha + A_n x_\alpha - A x_\alpha + A x_\alpha - Ax\|_F \le$$

$$\le \|A_n(x - x_\alpha)\|_F + \|A_n x_\alpha - A x_\alpha\|_F + \|A(x_\alpha - x)\|_F <$$

$$< C\|x - x_\alpha\|_F + \frac{\varepsilon}{3} + C\|x - x_\alpha\|_F = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, $\forall (n \ge n_0,\ x \in K)\ \|A_n x - Ax\|_F < \varepsilon$,

до того ж номер n_0 не залежить від точки x. Це означає, що $A_n x \to Ax$ рівномірно по n на кожному компакті $K \subset E$. ■

З’ясуємо, коли простір $\mathcal{L}(E, F)$ є повним у розумінні рівномірної або точкової збіжності.

Теорема 13.2. *Якщо нормований простір F — банахів, то $\mathcal{L}(E,F)$ — банахів у розумінні рівномірної збіжності.*

Доведення. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність операторів, тобто

$$\|A_n - A_m\| \to 0,\ n,m \to \infty.$$

Тоді $\forall x \in E$

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \to 0, n,m \to \infty.$$

Для кожного фіксованого $x \in E$ послідовність $\{A_n x\}$ є фундаментальною в F. Оскільки простір F є повним за умовою теореми, то послідовність $\{A_n x\}$ збігається до певного елемента $y \in F$. Позначимо $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Отже, ми визначили відображення $A : E \to F$. Його лінійність випливає із властивостей границі. Прокажемо його обмеженість.

$\|A_n - A_m\| \to 0$, $n,m \to \infty$ $\Rightarrow$ $\big|\|A_n\| - \|A_m\|\big| \to 0, n,m \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ — обмежена в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists C > 0\ \|A_n\| \le C\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Отже,

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \cdot \|x\| \le C\|x\|.$$

Внаслідок неперервності норми, маємо

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le C\|x\|.$$

Покажемо, що A_n рівномірно збігається до A в просторі $\mathcal{L}(E,F)$. Задамо $\varepsilon > 0$ і виберемо n_0 так, щоб

$\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$ для $n \geq n_0$, $p > 0$ і для будь-якого

$$x : \|x\| \leq 1.$$

Нехай $p \to \infty$. Тоді

$$\forall n \geq n_0,\ x : \|x\| \leq 1\ \ \|Ax - A_n x\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty} A_n$ в розумінні рівномірної збіжності.

Отже, $\mathcal{L}(E,F)$ є банаховим. ■

Теорема 13.3. *Якщо нормовані простори* E *і* F *— банахові, то* $\mathcal{L}(E,F)$ *— банахів у розумінні точкової збіжності.*

Доведення. Розглянемо точку $x \in E$ і фундаментальну у розумінні поточкової збіжності послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Оскільки F — банахів простір, то існує елемент $y = \lim_{n\to\infty} A_n x$. Таким чином, визначений оператор $A : E \to F$, такий що $y = Ax$. Лінійність цього оператора випливає із лінійності границі, а обмеженість — із теореми Банаха-Штейнгауза.

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n x\right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\| = C\|x\|. \quad ■$$

Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.96–102.
2. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа. — М.: Выща школа, 1988. — с. 576-578.