11. Спряжений простір

Ввести топологію в лінійному просторі можна не лише за допомогою норми.

Озн. 11.1. *Упорядкована четвірка* $(L,+,\times,\tau)$ *називається лінійним топологічним простором, якщо*

1) $(L,+,\times)$ — *дійсний лінійний простір*;

2) (L,τ) — *топологічний простір;*

3) *операція додавання і множення на числа в* L *є неперервними, тобто*

а) якщо $z_0 = x_0 + y_0$, *то для кожного околу* U *точки* z_0 *можна указати такі околи* V *і* W *точок* x_0 *і* y_0 *відповідно, що* $\forall x \in V,\, y \in W \;\; x + y \in U$ *;*

б) якщо $\alpha_0 x_0 = y_0$, *то для кожного околу* U *точки* y_0 *існує окіл* V *точки* x_0 *і таке число* $\varepsilon > 0$, *що* $\forall \alpha \in R^1 : |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ *і* $\forall x \in V \;\; \alpha x \in U$.

Зауваження 11.1. Оскільки будь-який окіл будь-якої точки x в лінійному топологічному просторі можна отримати зсувом околу нуля U шляхом операції $U + x$, топологія в лінійному топологічному просторі повністю визначається локальною базою нуля.

Спочатку доведемо деякі допоміжні факти щодо лінійних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі L.

Приклад 11.1. Всі нормовані простори є лінійними топологічними просторами.

Озн. 11.2. *Функціонал, визначений на лінійному топологічному просторі* L, *називається* ***неперервним****, якщо для будь-якого* $x_0 \in L$ *і будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує такий окіл* U *елемента* x_0, *що*

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad x \in U .$$

Лема 11.1. *Якщо лінійний функціонал* f *є неперервним в якійсь одній точці* x_0 *лінійного топологічного простору* L, *то він є неперервним на усьому просторі* L.

Доведення. Дійсно, нехай y — довільна точка простору L і $\varepsilon > 0$. Необхідно знайти такий окіл V точки y, щоб

$$\forall z \in V \quad \left| f(z) - f(y) \right| < \varepsilon .$$

Виберемо окіл U точки x_0 так, щоб

$$\forall x \in U \quad \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon .$$

Побудуємо окіл точки y шляхом зсуву околу U на елемент $y - x_0$:

$$V = U + (y - x_0) = \{ z \in L : z = u + y - x_0, u \in U \}$$

Із того, що $z \in V$, випливає, що $z - y + x_0 \in U$, отже,

$$\left| f(z) - f(y) \right| = \left| f(z - y) \right| =$$
$$= \left| f(z - y + x_0 - x_0) \right| = \left| f(z - y + x_0) - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Що і треба було довести. ■

Зауваження 11.2. Для того щоб перевірити неперервність лінійного функціонала в просторі, достатньо перевірити його неперервність в одній точці, наприклад, в точці 0.

Зауваження 11.3. У скінчено-вимірному лінійному топологічному просторі будь-який лінійний функціонал є неперервним.

Теорема 11.1. *Для того щоб лінійний функціонал f був неперервним на лінійному топологічному просторі L, необхідно і достатньо, щоб існував такий окіл нуля в L, на якому значення функціонала f є обмеженими в сукупності.*

Доведення. Необхідність. З того що функціонал f є неперервним в точці 0, випливає що

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists U(0) : |f(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in U(0).$$

Отже, його значення є обмеженими в сукупності на $U(0)$.

Достатність. Нехай $U(0)$ — такий окіл нуля, що

$$|f(x)| < C \quad \forall x \in U(0).$$

Крім того, нехай $\varepsilon > 0$. Тоді в околі нуля $\frac{\varepsilon}{C} U(0) = \left\{ x \in L : x = \frac{\varepsilon}{C} y, \, y \in U(0) \right\}$ виконується нерівність

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Це означає, що функціонал f є неперервним в околі нуля, а значить в усьому просторі L.■

Нехай E — нормований простір. Нагадаємо, що спряженим простором E^* називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі E із нормою

$$\|f\| = \sup_{x \in E, x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in E, \|x\| \le 1} |f(x)|.$$

Теорема 11.2. *Для того щоб лінійний функціонал f був неперервним на нормованому просторі E, необхідно і достатньо, щоб значення функціонала f були обмеженими в сукупності на одиничній кулі.*

Доведення. Необхідність. Нормований простір E є лінійним топологічним простором. За теоремою 11.1 будьяке значення неперервного лінійного функціонала f в деякому околі нуля є обмеженими в сукупності.

$$\forall C > 0\, \exists U(0) : \left| f(x) \right| < C \quad \forall x \in U(0).$$

В нормованому просторі будь-який окіл нуля містить кулю.

$$\exists S(0, r) \subset U(0).$$

Отже, значення функціонала f є обмеженими в сукупності в деякій кулі. Оскільки f — лінійний функціонал, це еквівалентно тому, що значення функціонала f є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, оскільки

$$\forall x \in S(0, r) : \left| f(x) \right| < C \Rightarrow \forall y = \frac{1}{r} x \in S(0,1) : \left| f(y) \right| < \frac{C}{r}.$$

Достатність. Оскільки значення функціонала f є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, а одинична куля є околом точки 0, то за теоремою 11.1 він є неперервним в точці 0. Отже, лінійний функціонал f є неперервним в нормованому просторі E. ■

На спряженому просторі можна ввести різні топології. Найважливішими з них є сильна і слабка топології.

Озн. 11.3. ***Сильною топологією*** *в просторі* E^* *називається топологія, визначена нормою в просторі* E^*, *тобто локальною базою нуля*

$$\left\{ f \in E^* : \| f \| < \varepsilon \right\},$$

де функціонали f *задовольняють умову*

$$\left| f(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in E : \| x \| \le 1.$$

а ε *— довільне додатне число.*

Теорема 11.3. *Спряжений простір E^* є повним..*

Доведення. Нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність лінійних неперервних функціоналів, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N\ \| f_n - f_m \| < \varepsilon .$$

Отже,

$$\forall x \in E\ \left| f_n(x) - f_m(x) \right| \leq \| f_n - f_m \| \|x\| < \varepsilon \|x\| . \qquad (1)$$

Покладемо $\forall x \in E$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) .$$

Покажемо, що f — лінійний неперервний функціонал.

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} f_n(\alpha x + \beta y) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\alpha f_n(x) + \beta f_n(y) \right] = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Крім того, з нерівності (1) випливає, що

$$\forall x \in E\ \lim_{m \to \infty} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| = \left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon \|x\| . \qquad (2)$$

Це означає, що функціонал $f - f_n$ є обмеженим. Оскільки він є лінійним і обмеженим, значить він є неперервним. Таким чином, функціонал $f = f_n + (f - f_n)$ також є неперервним. Крім того, $\| f - f_n \| \leq \varepsilon\ \ \forall n \geq N$, тобто $f_n \to f$ при $n \to \infty$ за нормою простору E^*. ■

Зауваження 11.4. Зверніть увагу на те, що простір E^* повний незалежно від того, чи є повним простір E.

Приклад 11.2. $(c_0)^* = l_1$.

Приклад 11.3. $(l_1)^* = m$.

Приклад 11.4. $(l_p)^* = l_q$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1$.

Озн. 11.4. ***Другим спряженим простором*** E^{**} називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі E^*.

Лема 11.2. *Будь-який елемент $x_0 \in E$ визначає певний лінійний неперервний функціонал, заданий на E^*.*

Доведення. Введемо відображення

$$\pi : E \to E^{**} \qquad (3)$$

поклавши

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0), \qquad (4)$$

де x_0 — фіксований елемент із E, а f — довільний лінійний неперервний функціонал із E^*. Оскільки рівність (4) ставить у відповідність кожному функціоналу f із E^* дійсне число $\varphi_{x_0}(f)$, вона визначає функціонал на просторі E^*. Покажемо, що φ_{x_0} — лінійний неперервний функціонал, тобто він належить E^{**}.

Дійсно, функціонал φ_{x_0} є лінійним, оскільки

$$\varphi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha\varphi_{x_0}(f_1) + \beta\varphi_{x_0}(f_2).$$

Крім того, нехай $\varepsilon > 0$ і A — обмежена множина в E, що містить x_0. Розглянемо в E^* окіл нуля $U(\varepsilon, A)$:

$$U(\varepsilon, A) = \left\{ f \in E^*, x_0 \in A : \left| f(x_0) \right| \le \varepsilon \right\},$$

тобто

$$U(\varepsilon, A) = \left\{ f \in E^*, x_0 \in A : \left| \varphi_{x_0}(f) \right| \le \varepsilon \right\}$$

З цього випливає, що функціонал φ_{x_0} є неперервним в точці 0, а значить і на всьому просторі E^*. ■

Озн. 11.5. *Відображення* $\pi : E \to E^{**}$, *побудоване в лемі 11.2, називається* ***природним відображенням простору*** E *в другий спряжений простір* E^{**}.

Озн. 11.6. *Якщо природне відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є бієкцією і* $\pi(E) = E^{**}$, *то простір* E *називається* ***напіврефлексивним***.

Озн. 11.7. *Якщо простір* E *є напіврефлексивним і відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є неперервним, то простір* E *називається* ***рефлексивним***.

Зауваження 11.5. *Якщо* E *— рефлексивний простір, то природне відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є ізоморфізмом.*

Теорема 11.4. *Якщо* E *— нормований простір, то природне відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є ізометрією.*

Доведення. Нехай $x \in E$. Покажемо, що

$$\|x\|_E = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

Нехай f — довільний ненульовий елемент простору E^*. Тоді

$$|f(x)| \le \|f\|\|x\| \Rightarrow \|x\| \ge \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Оскільки ліва частина нерівності не залежить від f, маємо

$$\|x\| \ge \sup_{f \in E^*, f \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

З іншого боку, внаслідок теореми Хана-Банаха, якщо x — ненульовий елемент в нормованому просторі E, то існує такий неперервний лінійний функціонал f, визначений на E, що

$$\|f\| = 1 \ i \ f(x) = \|x\|$$

(визначаємо функціонал на одновимірному підпросторі формулою $f(\alpha x)=\alpha\|x\|$, а потім продовжуємо без збільшення норми на весь простір). Отже, для кожного $x \in E$ знайдеться такий ненульовий лінійний функціонал f, що

$$|f(x)|=\|f\|\|x\|,$$

тому

$$\|\pi(x)\|_{E^{**}}=\sup_{f\in E^{*},\, f\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|}\geq\|x\|.$$

Отже, $\|x\|_E=\|\pi(x)\|_{E^{**}}$. ■

Зауваження 11.6. Оскільки природне відображення нормованих просторів $\pi: E\to E^{**}$ є ізометричним, *поняття напіврефлексивних і рефлексивних просторів для нормованих просторів є еквівалентними.*

Зауваження 11.7. Оскільки простір, спряжений до нормованого, є повним (теорема 11.3), *будь-який рефлексивний нормований простір є повним*.

Зауваження 11.8. Обернене твердження є невірним.

Приклад 11.5. Простір c_0 є повним, але нерефлексивним, тому що спряженим до нього є простір l_1, а спряженим до простору l_1 є простір m.

Приклад 11.6. Простір неперервних функцій $C[a,b]$ є повним, але нерефлексивним (більше того, немає жодного нормованого простору, для якого простір $C[a,b]$ був би спряженим).

Приклад 11.7. Приклад рефлексивного простору, що не збігається із своїм спряженим:

$$l_p^{**}=l_q^{*}=l_p,\ p>1,\ p\neq 2,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Приклад 11.8. Приклад рефлексивного простору, що збігається із своїм спряженим:

$$l_2^{**} = l_2^* = l_2 .$$

Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с. 112–123.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981. — с. 175–178, 182-192.