

10. Нормовані простори і простір лінійних неперервних операторів

Озн. 10.1. Нехай E — лінійний простір над полем K . Відображення $\|\cdot\|: E \rightarrow R^+$ називається **нормою** в просторі E , якщо $\forall (x \in E, y \in E, \lambda \in K)$ виконуються аксіоми норми:

1. $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ (віддільність);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однорідність);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Озн. 10.2. Лінійний простір із введеною на ньому нормою називається **нормованим**.

Ясно, що нормований простір є метричним, оскільки в ньому можна ввести метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. З цього випливає, що норма елемента в нормованому просторі є відстанню між ним і нульовим елементом: $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

Приклад 10.1. Простір

$$l = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$$

є нормованим з нормою $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Озн. 10.3. Послідовність $\{x_n\}$ елементів нормованого простору E називається **збіжною за нормою**, або **сильно збіжною**, або просто **збіжною**, до елемента $x_0 \in E$, якщо $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо $\{x_n\}$ збігається до елемента $x_0 \in E$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$.

Озн. 10.4. Повний нормований простір називається **банаховим**.

Озн. 10.5. Функціонал називається **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : |f(x)| \leq C \|x\|_E. \quad (1)$$

Озн. 10.7. Найменша серед усіх додатних констант, що задовольняють нерівність (1) називається **нормою функціонала**.

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0, x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Озн. 10.8. Нехай E_1 і E_2 – нормовані простори. На множині $D \subset E_1$ задано **оператор**, або відображення A , із значеннями в E_2 , якщо кожному елементу $x \in D$ поставлено у відповідність елемент $y = Ax \in E_2$.

Озн. 10.9. Оператор A називається **лінійним**, якщо

1. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D$ для довільних $x_1, x_2 \in D$, де α, β – дійсні числа;
2. $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$ для довільних $x_1, x_2 \in D$, α, β – дійсні числа.

Озн. 10.10. Якщо A – лінійний оператор з E_1 в E_2 такий, що $D = E_1$, та з умови $x_n \rightarrow x_0$, $x_n, x_0 \in E_1$ випливає, що $A(x_n) \rightarrow A(x_0)$ в E_2 , то A називається **лінійним неперервним оператором**.

Озн. 10.10. Оператор A називається **обмеженим** в просторі E , якщо існує така константа C , якщо $\forall x \in E$

$$\|Ax\| \leq C \|x\|.$$

Озн. 10.12. Найменша константа C , яка $\forall x \in E$ задовольняє нерівність $\|Ax\| \leq C\|x\|$, називається **нормою оператора A** .

Теорема 10.1. Лінійний оператор, заданий на лінійному нормованому просторі, є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що A — неперервний, лінійний, але не обмежений оператор. Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E : \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E.$$

Покладемо

$$\xi_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

За побудовою

$$\xi_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Оцінимо норму елемента $\|A\xi_n\|_F$:

$$\|A\xi_n\|_F = \left\| A \left(\frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\|_F = \frac{1}{n\|x_n\|_E} \|Ax_n\|_F > \frac{n\|x_n\|_E}{n\|x_n\|_E} = 1.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\xi_n\|_F \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A\xi_n \neq 0.$$

A — лінійний оператор \Rightarrow

$$\Rightarrow A0 = A(x-x) = Ax - Ax = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A\xi_n \neq A0$$

$\Rightarrow A$ — не неперервний. Отримане протиріччя доводить, що оператор A є обмеженим.

Достатність. A — обмежений оператор \Rightarrow

$$\exists C > 0 \forall x \in E \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Нехай

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\Rightarrow \|x_n - x\|_E \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_F = \|A(x_n - x)\|_F \leq \\ &\leq C \|x - x_n\|_E \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_F \rightarrow 0 \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax \text{ при } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Це означає, що оператор A — неперервний. ■

Озн. 10.13. Лінійні неперервні оператори A , що відображають нормований простір E в нормований простір F , утворюють **нормований простір операторів** $L(E, F)$ з нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0, x \in E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1, x \in E} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \in E} \|Ax\|_F.$$

Теорема 10.2. Нехай A — лінійний обмежений оператор, що діє із нормованого простору E в банахів простір F . Якщо область визначення оператора $D(A)$ щільна в E , то існує такий лінійний обмежений оператор $\bar{A}: E \rightarrow F$ такий що, $\bar{A}x = Ax \quad \forall x \in D(A)$ і $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Доведення. Нехай $x \in E \setminus D(A)$. Оскільки $\overline{D(A)} = E$, то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Із нерівності

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \|x_n - x_m\|_E$$

і обмеженості оператора A випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n, m \geq N \|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною.

Оскільки простір F є повним, ця послідовність є збіжною:

$$\exists \bar{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n.$$

Покажемо, що цей елемент визначений коректно, тобто не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Припустимо, що існує ще одна послідовність $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, яка збігається до елемента x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x.$$

Нехай

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n, \quad y' = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax'_n.$$

З того що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \|x_n - x'_n\|_E = 0,$$

випливає

$$\begin{aligned} \|y - y'\|_F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - y'\|_F \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - Ax_n\|_F + \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax'_n - y'\|_F = 0. \end{aligned}$$

Отже, $y = y'$.

Лінійність оператора \bar{A} випливає із лінійності оператора A і властивостей границь.

Оскільки оператор \bar{A} збігається с оператором A в області визначення $D(A)$, але має більш широку область визначення,

$$\|A\| \leq \|\bar{A}\|.$$

З іншого боку,

$$\|Ax_n\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n\|_E \quad \forall x_n \in E.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_F &= \left\| A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \right\|_F = \|\bar{A}x\|_F \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\|_E = \|A\| \cdot \|x\|_E \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Це означає, що

$$\|\bar{A}\| \leq \|A\|.$$

Порівнюючи оцінки $\|\bar{A}\|$, отримуємо

$$\|\bar{A}\| = \|A\|. \blacksquare$$

Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. Нехай E — дійсний нормований простір, L — його підпростір, f_0 — обмежений лінійний функціонал на L . Цей лінійний неперервний функціонал можна продовжити до деякого лінійного функціонала f , заданого на всьому просторі E без збільшення норми:

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Доведення. Нехай f_0 — обмежений лінійний функціонал на L . Значить,

$$|f_0(x)| \leq \|f_0\| \cdot \|x\|, \quad x \in L.$$

За теоремою Хана-Банаха в лінійному просторі

$$\exists f \text{ — продовження } f_0 \text{ на } E: |f(x)| \leq \|f_0\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$$

З цього випливає, що

$$\|f\| \leq \|f_0\|.$$

З іншого боку, $L \subset E \Rightarrow$

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0, x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \neq 0, x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0, x \in L} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|.$$

Отже, $\|f\| = \|f_0\|$. \blacksquare

Література

1. Садовничий В.А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.96–102.