9. Лінійні простори

Лінійна система є алгебраїчною структурою, яка абстрагує властивості, пов'язані із додаванням та множенням векторів евклідова простору на скаляр.

Озн. 9.1. ***Дійсним лінійним (векторним) простором*** називається упорядкована трійка (E,+, $\times$), *що складається з множини E, елементи якого називаються векторами, операції додавання і операції множення на дійсні числа, якщо для кожних двох її елементів* x *та* y *визначено їх суму* $x+y\in E$ *, і для будь-якого* x *та дійсного числа* λ *визначено добуток* $\lambda x\in E$*, які задовольняють аксіоми лінійного простору*:

1. $\exists\,\theta\in E$ *, що* $x+\theta=x$ *для довільного* $x\in E$ *;*
2. $\exists(-x)\in E:\ x+(-x)=\theta$
3. $(x+y)+z=x+(y+z)$ *(асоціативність додавання);*
4. $x+y=y+x$ *(комутативність додавання);*
5. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ *(дистрибутивність);*
6. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ *(дистрибутивність);*
7. $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$ *(асоціативність множення);*
8. $1\cdot x=x$.

Властивості 1–4 означають, що лінійний простір є *абелевою* (тобто *комутативною*) *групою*.

Приклад 9.1. Сукупність дійсних чисел R^1 із звичайними арифметичними операціями додавання та множення є лінійним простором.

Приклад 9.2. Евклідів простір R^n — сукупність векторів $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, що складаються с дійсних чисел, є лінійним.

Озн. 9.2. *Лінійні простори* E *і* F *називаються* ***ізоморфними****, якщо між їхніми елементами можна установити взаємно-однозначну відповідність, яка узгоджена із операціями в цих просторах, тобто* $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, $x, y \in E$, $x', y' \in F$ $\Rightarrow x + y \leftrightarrow x' + y'$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$.

Ізоморфні простори можна вважати різними реалізаціями **одного** простору.

Приклад 9.3. Простір R^n і простір поліномів, степінь яких не перевищує n-1 є ізоморфними.

Озн. 9.3. *Числова функція* f*, визначена на лінійному просторі* E*, називається* ***функціоналом****.*

Озн. 9.4. *Функціонал називається* ***адитивним****, якщо*

$$\forall x, y \in E \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Озн. 9.5. *Функціонал називається* ***однорідним****, якщо*

$$\forall x \in E \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Озн 9.6. *Адитивний однорідний функціонал називається* ***лінійним****.*

Озн 9.7. *Функціонал називається* ***неперервним у точці*** x_0*, якщо з того що довільна послідовність* x_n *прямує до* x_0 *випливає, що послідовність* $f(x_n)$ *прямує до* $f(x_0)$.

Озн. 9.8. *Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі* E*, називається простором, спряженим до* E*, і позначається як* E^*.

Приклад 9.4. $I(x) = \int_a^b x(t)\,dt$ є лінійним функціоналом в $C[a,b]$.

Озн 9.9. *Нехай* E — *лінійний простір. Визначений на просторі* E *функціонал* $p(x)$ *називається* ***опуклим****, якщо*

$\forall x, y \in E, 0 \le \alpha \le 1: \; p(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha) p(y)$.

Озн 9.9. *Функціонал $p(x)$ називається* ***додатно-однорідним****, якщо* $\forall x \in E, \alpha > 0: \; p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

Приклад 9.4. Будь-який лінійний функціонал є додатно-однорідним.

Озн 9.11. *Нехай E — дійсний лінійний простір, а E_0 — його підпростір. До того ж на підпросторі E_0 заданий деякий лінійний функціонал f_0. Лінійний функціонал f, визначений на всьому просторі E, називається* ***продовженням*** *функціонала f_0, якщо* $\forall x \in E_0 \quad f(x) = f_0(x)$.

Озн 9.12. *Непорожня підмножина L' лінійного простору L називається* ***лінійним підпростором****, якщо вона сама утворює лінійний простір відносно операцій додавання і множення на число, уведених в просторі L.*

Теорема Хана-Банаха. *Нехай $p(x)$—додатно-однорідний і опуклий функціонал, визначений на дійсному лінійному просторі L, а L_0 — лінійний підпростір в L. Якщо f_0 — лінійний функціонал, заданий на L_0 і підпорядкований на цьому підпросторі функціоналу p, тобто*

$$f_0(x) \le p(x), \tag{1}$$

то функціонал f_0 може бути продовжений до лінійного функціонала f, заданого на просторі L і підпорядкованого функціоналу p на всьому просторі L:

$$f(x) \le p(x). \tag{2}$$

Доведення. Покажемо, що якщо $L_0 \ne L$, то f_0 можна продовжити на $L' \supset L_0$, зберігаючи умову підпорядкованості. Нехай $z \in L' \setminus L_0$, а L' — елементарне розширення L_0:

$$L' = \left\{x' : x' = tz + x,\, x \in L_0,\, z \in L \setminus L_0,\, t \in R^1\right\} = \left\{L_0; z\right\}.$$

Якщо f' — шукане продовження f_0 на L', то

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f(x) = tf'(z) + f_0(x).$$

Покладемо $f'(z) = c$. Тоді $f'(tz + x) = tc + f_0(x)$. Виберемо c так, щоб виконувалась умова підпорядкованості:

$$\forall x \in L_0 \quad f_0(x) + tc \le p(x + tz). \tag{3}$$

Якщо $t > 0$, поділимо (3) на t і отримаємо еквівалентну умову

$$\forall x \in L_0 \; f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) \Rightarrow c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right). \tag{4}$$

Якщо $t < 0$, поділимо (3) на $-t$. Тоді

$$\forall x \in L_0 - f_0\left(\frac{x}{t}\right) - c \le p\left(-\frac{x}{t} - z\right) \Rightarrow c \ge -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right) \tag{5}$$

Покажемо, що число c, що задовольняє умови (4) і (5) існує. Нехай y' і $y'' \in L_0$, а $z \in L' \setminus L_0$. Тоді

$$f_0(y'' - y') = f_0(y'') - f_0(y') \le p(y'' - y') =$$
$$= p(y'' + z - y' - z) \le p(y'' + z) + p(-y' - z).$$

З цього випливає, що

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \ge -f_0(y') - p(-y' - z).$$

Покладемо

$$c'' = \inf_{y''}\left(-f_0(y'') + p(y'' + z)\right),\; c' = \sup_{y'}\left(-f_0(y') + p(-y' - z)\right).$$

Оскільки y' і y'' — довільні, то з умови підпорядкованості випливає, що $c'' > c'$. Отже, $\exists c : c'' \ge c \ge c'$.

Визначимо функціонал f' на L':

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

За побудовою цей функціонал задовольняє умову (1). Отже, якщо f_0 задано на $L_0 \subset L$ і задовольняє на L_0 умову (1), то його можна продовжити на $L' \supset L_0$ із збереженням цієї умови.

Якщо в просторі L існує злічена система елементів $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, така що будь-який елемент простору L можна подати як лінійну комбінацію елементів $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, то продовження функціонала f_0 на L можна побудувати за індукцією, розглядаючи зростаючий ланцюжок підпросторів

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\},\ L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\},\ ...,\ L^{(n)} = \{L^{(n-1)}, x_n\},\ ...,$$

де $L^{(k)} = \{L^{(k-1)}, x_{k+1}\}$— мінімальний лінійний підпростір, що містить $L^{(k)}$ і $x^{(k+1)}$. Тоді кожний елемент $x \in L$ увійде в деякий $L^{(k)}$ і функціонал f_0 буде продовжений на весь простір L. В загальному випадку використовується схема, яка базується на лемі Цорна. Уведемо в розгляд потрібні означення.

Озн 9.13. *Говорять, що на множині X задано* ***відношення часткового порядку ≤****, якщо виділено деяку сукупність пар $P = \{(x, y) \in X \times X\}$, для яких*

1) $x \le x$;
2) $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$.

При цьому не вимагається, щоб усі елементи були порівняними.

Приклад 9.6. Площина R^2, на якій між точками $x = (x_1, x_2)$ і $y = (y_1, y_2)$ установлено відношення $x \le y$, якщо $x_1 \le x_2$ і $y_1 \le y_2$.

Озн 9.14. *Якщо всі елементи X є попарно порівняними, то множина X називається* ***лінійно упорядкованою****.*

Озн 9.15. *Лінійно упорядкована підмножина частково упорядкованої множини називається* ***ланцюгом****.*

Приклад 9.7. Пряма R^1 із покоординатним порядком, що розглядається як підмножина площини R^2, є ланцюгом.

Озн 9.16. *Якщо* X *— частково упорядкована множина і* $M \subset X$, *то елемент* $\mu \in X$ *називається* ***мажорантою*** *множини* X*, якщо*

$$m \leq \mu \quad \forall m \in M .$$

Озн 9.17. *Якщо* m *— така мажоранта* $M \subset X$*, що* $m \leq \hat{m}$ *для будь-якої іншої мажоранти* $\hat{m}$ *множини* M*, то* m *називається* ***точною верхньою гранню*** *множини* M .

Озн 9.18. *Елемент* $m \in X$ *називається* ***максимальним****, якщо немає такого елемента* $m' \in X$*, що* $m \leq m'$.

Лема Цорна. *Якщо будь-який ланцюг в частково упорядкованій множині* X *має мажоранту, то в* X *існує максимальний елемент.*

Позначимо через $\mathfrak{M}$ сукупність усіх можливих продовжень функціоналу f_0 на більш широкі підпростори з умовою підпорядкованості p. Кожне таке продовження f' має лінійну область визначення L', на якій $f' \leq p$ і $f'|_{X_0} = f_0$. Будемо вважати продовження f' підпорядкованим продовженню f'', якщо для відповідних областей визначення маємо $L' \subset L''$ і $f''|_{L'} = f'$. Таким чином, маємо частковий порядок. Умова щодо ланцюгів виконана: якщо дано ланцюг продовжень f_α з областями визначення L_α, то мажоранта $f \in \mathfrak{M}$ будується так. Розглянемо множину $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$, яка є лінійним простором, оскільки $\forall x, y \in L \quad \exists L_\alpha, L_\beta$, такі що $x \in L_\alpha$ і $y \in L_\beta$. Але за означенням ланцюга або $L_\alpha \subset L_\beta$, або

$L_\beta \subset L_\alpha$, тобто $x+y \in L$. Ясно, що $tx \in L \quad \forall t \in R^1$. З тих же причин функціонал $f(x) = f_\alpha(x_\alpha)$ для $x = x_\alpha$ коректно заданий на L, тобто $f_\alpha(x_\alpha) = f_\beta(x_\beta)$, якщо $x_\alpha = x_\beta$. До того ж $f \le p$ на L. Отже, $f \in \mathfrak{M}$ — мажоранта для всіх f_α. За лемою Цорна в $\mathfrak{M}$ є максимальний елемент f. Отже, область визначення функціонала f збігається із X, інакше функціонал f можна було б лінійно продовжити на більш широкий простір із умовою підпорядкованості p, що суперечить максимальності p. ■

Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986, 91-96, 106-109.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981, с.119-138.
3. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. Университетский курс. — М.: - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. с. 14-16, 258-264.