8. Компактні метричні простори

Озн. 8.1. *Нехай A — деяка множина в метричному просторі (X,ρ) і ε — деяке додатне число. Множина B із цього простору називається **ε-сіткою** для множини A, якщо $\forall x \in A\ \exists y \in B : \rho(x,y) < \varepsilon$.*

Озн. 8.2. *Множина A називається **цілком обмеженою**, якщо для неї при довільному $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε*-сітка.

Теорема 8.1 (Хаусдорф). *Нехай (X,ρ) — метричний простір. Наступні твердження є еквівалентними.*

1) (X,ρ) *— компактний;*
2) (X,ρ) *— повний і цілком обмежений;*
3) *із довільної післідовності точок простору (X,ρ) можна вибрати збіжну підпослідовність (**секвенціальна компактність**);*
4) *довільна нескінченна підмножина в X має хоча б одну граничну точку (**зліченна компактність**).*

Доведення. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Покажемо, що $1 \Rightarrow 2$. Нехай (X,ρ) — компактний простір. Покажемо його повноту. Нехай $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ — фундаментальна послідовність в X. Покладемо $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ і $B_n = \overline{A}_n$. Оскільки система $\{B_n\}$ є центрованою системою замкнених підмножин, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ — непорожня множина. Нехай $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N > 0\ \exists n > N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n,m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n,m > N :$$
$$\rho(x_0, x_m) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x_m) < 2\varepsilon.$$

З цього випливає, що

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \in X .$$

Отже, (X, ρ) — повний простір.

Припустимо тепер, що простір (X, ρ) не є цілком обмеженим. Інакше кажучи, припустимо, що існує таке число $\varepsilon_0 > 0$ таке, що в X немає скінченної ε_0-сітки. Візьмемо довільну точку $x_1 \in X$.

1) $\exists x_2 \in X :\ \rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Інакше точка x_1 утворювала б ε_0-сітку в X.
2) $\exists x_3 \in X :\ \rho(x_1, x_3) > \varepsilon_0$, $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0$. Інакше точки x_1 і x_2 утворювали б ε_0-сітку в X.

...

n) $\exists x_{n+1} \in X :\quad \rho(x_{n+1}, x_i) > \varepsilon_0,\ i = 1,2,...,n$. Інакше точки $x_1, x_2, ..., x_n$ утворювали б ε_0-сітку в X.

Таким чином, ми побудували послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка не є фундаментальною, а, отже, не має границі. З цього випливає, що кожна із множин $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$, які утворюють центровану систему, є замкненою. Їх перетин є порожнім. Це протирічить компактності простору (X, ρ).

Покажемо, що $2 \Rightarrow 3$. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність точок X.

1) Виберемо в X скінченну 1-сітку і побудуємо навколо кожної з точок, що її утворюють, кулю радіуса 1: $S_i\left(a_i,1\right)$, $i=1,...,N_1$. Оскільки X є цілком обмеженою,
$$\bigcup_{i=1}^{N_1} S_i\left(a_i,1\right)=X .$$
З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, S_1, містить нескінченну підпослідовність $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2) Виберемо в X скінченну $\frac{1}{2}$-сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють кулю радіуса $\frac{1}{2}$: $S_i\left(b_i,\frac{1}{2}\right)$, $i=1,2,...,N_2$. Оскільки множина X є цілком обмеженою,
$$\bigcup_{i=1}^{N_2} S_i\left(b_i,\frac{1}{2}\right)=X .$$
З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, S_2, містить нескінченну підпослідовність $\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

...

m) Виберемо в X скінченну $\frac{1}{m}$-сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють кулю радіуса $\frac{1}{m}$: $S_i\left(c_i,\frac{1}{m}\right)$, $i=1,2,...,N_m$. Оскільки множина X є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_m} S_i\left(c_i, \frac{1}{m}\right) = X .$$

З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, S_m, містить нескінченну підпослідовність $\left\{x_n^{(m)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{x_n^{(m-1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Продовжимо цей процес до нескінченності.

Розглянемо діагональну послідовність $\left\{x_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Вона є підпослідовністю послідовності $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Крім того, при $m \geq n_0$ $x_m^{(m)} \in \left\{x_n^{(n_0)}\right\}_{n=1}^{\infty} \in S_{n_0}$. Це означає, що $\left\{x_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною і внаслідок повноти (X, ρ) має границю.

Твердження $3 \Rightarrow 4$ є тривіальним, оскільки із довільної нескінченної множини можна виділити зліченну множину $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, яка внаслідок секвенціальної компактності містить збіжну підпослідовність: $\left\{x_{n_k}\right\}_{n_k=1}^{\infty} \to x_0 \in X$.

Покажемо тепер, що $4 \Rightarrow 1$. Для цього спочатку доведемо, що множина X є цілком обмеженою, тобто в ній для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує ε-сітка. Якщо б це було не так, то застосувавши той же прийом, що і на етапі $1 \Rightarrow 2$, ми побудували б послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, яка не має граничних точок, оскільки $\rho\left(x_n, x_m\right) \geq \varepsilon$ для всіх $m \neq n.$ Для кожного n побудуємо скінченну $\frac{1}{n}$-сітку і розглянемо об'єднання всіх таких сіток. Воно є щільним і не більше ніж зліченним. Таким чином, простір (X, ρ) є сепарабельним, отже, має зліченну базу.

Для того щоб довести компактність простору, що має зліченну базу, достатньо перевірити, що із будь-якого зліченного (а не довільного нескінченного) відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття. Припустимо, що $\{U_\alpha\}$ — довільне покриття простору (X,ρ), а $\{V_n\}$ — його зліченна база. Кожна точка $x \in X$ міститься в деякому U_α. За означенням бази знайдеться деяке $V_i \in \{V_n\}$ таке, що $x \in V_i \subset U_\alpha$. Якщо кожній точці $x \in X$ поставити у відповідність окіл $V_i \in \{V_n\}$, то сукупність цих околів утворить зліченне покриття множини X.

Залишилося довести, що із довільного зліченного відкритого покриття множини X можна вибрати скінченне підпокриття. Для цього достатньо довести еквівалентне твердження для замкнених підмножин, що утворюють зліченну центровану систему.

Нехай $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — центрована система замкнених підмножин X. Покажемо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing .$$

Нехай $\Phi_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$. Ясно, що множини Φ_n є замкненими і непорожніми, оскільки система $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ є центрованою, і

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots, \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n .$$

Можливі два випадки.

1) Починаючи з деякого номера
$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots = \Phi_{n_0+k} = \ldots$$
Тоді
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \varnothing .$$
2) Серед Φ_n є нескінченно багато попарно різних. Достатньо розглянути випадок, коли всі вони відрізняються одна від одної. Нехай $x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}$. Тоді послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченною множиною різних точок із X і, внаслідок уже доведеного факту (*злічення компактність*), має хоча б одну граничну точку x_0. Оскільки Φ_n містить всі точки $x_n, x_{n+1}, \ldots$ то x_0 — гранична точка для кожної множини Φ_n і внаслідок замкнености Φ_n
$$\forall n \in N \quad x_0 \in \Phi_n .$$
Отже,
$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n ,$$
тобто $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ є непорожнім. ■

Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.49–51.