7. Повні метричні простори

Озн. 7.1. *Метричний простір називається* ***повним****, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність має границю.*

Приклад 7.1. $\left(R^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\right)$.

Приклад 7.2. $\left(C[a,b], \max_{[a,b]}\left|x(t) - y(t)\right|\right)$.

Озн. 7.2. *Бієктивне відображення* φ *одного метричного простору* (E_1, ρ_1) *на інший* (E_2, ρ_2) *називається ізометрією, якщо*

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 \ \rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

Озн. 7.3. *Метричні простори, між якими існує ізометрія, називаються ізометричними.*

Озн. 7.4. *Повний метричний простір* $(\tilde{E}, \tilde{\rho})$ *називається* ***поповненням*** *метричного простору* (E, ρ)*, якщо*

1) $E \subset \tilde{E}$;
2) $\overline{E} = \tilde{E}$.

Теорема про поповнення метричного простору (Хаусдорф). *Будь-який метричний простір має поповнення, єдине з точністю до ізометрії, що залишає точки простору нерухомими.*

Лема 7.1. *Якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, то сама послідовність збігається до тієї ж границі.*

Доведення. Припустимо, що $\lim_{n_k \to \infty} \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon) > 0 : \forall n \ge N_1 \quad \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) < \varepsilon$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x_n, x) \le \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, x\right).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \ge N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n, n_k \ge \max(N_1, N_2)$$

$$\rho(x_n, x_0) \le \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

Лема 7.2. *Будь-яка підпослідовність фундаментальної послідовності є фундаментальною.*

Доведення. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(x_{n_k}, x_{n_l}\right) \le \rho\left(x_{n_k}, x_n\right) + \rho\left(x_n, x_{n_l}\right).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \ge N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n, n_k, n_l \ge N$$

$$\rho\left(x_{n_k}, x_{n_l}\right) \le \rho\left(x_{n_k}, x_n\right) + \rho\left(x_n, x_{n_l}\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

Теорема 7.1 (принцип вкладених куль). *Для того щоб метричний простір був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому будь-яка послідовність замкнених вкладених одна в одну куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.*

Доведення. Необхідність. Нехай (X,ρ) — повний метричний простір, а $S_1^*(x_1,r_1)\supset S_2^*(x_2,r_2)\supset\ldots$ — вкладені одна в одну замкнені кулі.

Послідовність їх центрів є фундаментальною, оскільки

$$\rho(x_n,x_m)<r_n \text{ при } m>n\text{, а } r_n\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Оскільки (X,ρ) — повний метричний простір, існує елемент $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, $x\in X$.

Покажемо, що x належить всім кулям $S_n^*(x_n,r_n)$, $n=1,2,\ldots$, тобто $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S^*(x_n,r_n)$. Дійсно, оскільки $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N>0:\forall n\ge N\quad \rho(x_n,x)<\varepsilon.$$

Значить, в довільному околі точки x знайдеться нескінченна кількість точок із послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера N. Оскільки кулі вкладені одна в одну, ці точки належать всім попереднім кулям $S_1^*,S_2^*,\ldots,S_{N-1}^*$. Отже, для довільного n точка x є точкою дотику множини S_n^*, тобто належить його замиканню. Оскільки кожна куля є замкненою, точка x належить всім S_n^*. Це означає, що

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n^*.$$

Достатність. Покажемо, що якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність, то вона має границю $x\in X$.

1. Оскільки послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною, то $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_1 > 0 : \forall n \geq n_1 \quad \rho\left(x_n, x_{n_1}\right) < \varepsilon$. Поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ми можемо вибрати точку x_{n_1} так, що $\rho\left(x_n, x_{n_1}\right) < \frac{1}{2}$ для довільного $n > n_1$. Зробимо точку x_{n_1} центром замкненої кулі радіуса 1: $S_1^*\left(x_{n_1}, 1\right)$.
2. Оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_1}^{\infty}$ є фундаментальною (за лемою 7.2), то поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, можна вибрати точку x_{n_2} таку, що $\rho\left(x_n, x_{n_2}\right) < \frac{1}{2^2}$ для довільного $n > n_2 > n_1$. Зробимо точку x_{n_2} центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2}$: $S_2^*\left(x_{n_2}, \frac{1}{2}\right)$.

...

k. Нехай $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{k-1}}$, де $n_1 < n_2 < ... < n_{k-1}$ уже вибрані. Тоді, оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_{k-1}}^{\infty}$ є фундаментальною, покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ і виберемо точку x_{n_k} так, щоб виконувалися умови $\rho\left(x_n, x_{n_k}\right) < \frac{1}{2^k}$ для довільного $n \geq n_k > n_{k-1}$. Як і раніше, будемо вважати точку x_{n_k} центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2^{k-1}}$: $S_k^*\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$.

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. Покажемо, що ці кулі вкладаються одна в одну, тобто

$$S^{*}_{k+1}\left(x_{n_{k+1}},\frac{1}{2^{k}}\right)\subset S^{*}_{k}\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Нехай точка $y\in S^{*}_{k+1}\left(x_{n_{k+1}},\frac{1}{2^{k}}\right)$. Значить, $\rho\left(y,x_{n_{k+1}}\right)\le\frac{1}{2^{k}}$. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(y,x_{n_k}\right)\le\rho\left(y,x_{n_{k+1}}\right)+\rho\left(x_{n_{k+1}},x_{n_k}\right).$$

Оскільки $n_{k+1}>n_k$, то $\rho\left(x_{n_{k+1}},x_{n_k}\right)<\frac{1}{2^{k}}$. Значить,

$$\rho\left(y,x_{n_k}\right)\le\frac{1}{2^{k}}+\frac{1}{2^{k}}=\frac{2}{2^{k}}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Інакше кажучи,

$$y\in S^{*}_{k}\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Таким чином, ми побудували послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. За припущенням, в просторі (X,ρ) існує точка x, загальна для всіх таких куль: $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}S^{*}_{k}\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)$. Крім того, за побудовою, $\rho\left(x_{n_k},x\right)=\frac{1}{2^{k-1}}\to 0$, коли $k\to\infty$. Таким чином, фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ містить підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякої точки в просторі (X,ρ). Із леми 7.1 випливає, що і вся послідовність $\{x_n\}$ прямує то тієї ж точки. Таким чином, простір (X,ρ) є повним. ■

Зауваження. Покажемо, що умову $r_n \to 0$ зняти не можна. Розглянемо метричний простір (N,ρ), де N — множина натуральних чисел, а

$$\rho(m,n)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m},\ \textit{якщо}\ n\neq m,\\ 0,\ \textit{якщо}\ n=m.\end{cases}$$

Визначимо послідовність замкнених куль з центрами в точках n і радіусом $1+\dfrac{1}{2n}$.

$$S^*\left(n,1+\frac{1}{2n}\right)=\left\{m:\rho(m,n)\leq 1+\frac{1}{2n}\right\}=\{n,n+1,\ldots\},\ n=1,2,\ldots$$

Ці кулі є вкладеними одна в одну і замкненими, простір є повним, але перетин куль є порожнім (яке б число ми не взяли, знайдеться нескінченна кількість куль, які лежать правіше цієї точки). Отже, необхідні умови в принципі вкладених куль не виконуються. ■

Озн. 7.5. *Підмножина* M *метричного простору* (X,ρ) *називається* ***множиною першої категорії****, якщо його можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зліченої кількості ніде не щільних множин.*

Озн. 7.6. *Підмножина* M *метричного простору* (X,ρ) *називається* ***множиною другої категорії****, якщо вона не є множиною першої категорії.*

Теорема 7.2 (теорема Бера про категорії). *Нехай* (X,ρ) — *непорожній повний метричний простір, тоді* X *є множиною другої категорії.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n ,$$

і кожна множина E_n, $n=1,2,...$ є ніде не щільною в X. Нехай S_0 — деяка замкнена куля радіуса 1.

Оскільки множина E_1 є ніде не щільною, існує замкнена куля S_1, радіус якої менше $\frac{1}{2}$, така що

$$S_1\subset S_0 \text{ і } S_1\cap E_1=\varnothing .$$

(Якщо існує куля радіуса більше $\frac{1}{2}$, що задовольняє таким умовам, то ми виберемо в ній кулю, радіуса менше $\frac{1}{2}$.)

Оскільки множина E_2 є ніде не щільною, існує замкнена куля S_2, радіус якої менше $\frac{1}{2^2}$, така що

$$S_2\subset S_1 \text{ і } S_2\cap E_2=\varnothing .$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність вкладених одна в одну замкнених куль $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, радіуси яких прямують до нуля. За принципом вкладених куль існує точка $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n\cap X$. Оскільки за побудовою $S_n\cap E_n=\varnothing$, то

$x \notin E_n \ \forall n = 1, 2, \ldots$. Значить, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Це суперечить припущенню, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. ■

Озн. 7.7. *Відображення* $g : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *називається* ***стискаючим****, якщо існує таке число* $0 < \alpha < 1$*, що* $\rho(g(x), g(y)) \le \alpha\rho(x, y)$ *для довільних* $x, y \in X$.

Теорема 7.3. *Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.*

Розв'язок. Нехай $x_n \to x$, а $g : X \to X$ є стискаючим відображенням. Тоді

$$0 \le \rho(g(x_n), g(x)) \le \alpha\rho(x_n, x) \to 0, n \to \infty.$$

Отже,

$$g(x_n) \to g(x), \text{ коли } x_n \to x. \ ■$$

Теорема 7.4 (принцип стискаючих відображень Банаха). *Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору* (X, ρ) *в себе має лише одну нерухому точку, тобто* $\exists! x \in X : g(x) = x$.

Розв'язок. Нехай x_0 — деяка точка із X. Визначимо послідовність точок $\{x_n\}$ за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0), \ldots, x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо $m > n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \le \ldots \le$$

$$\le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \le$$

$$\le \alpha^n \rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \le \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}$$

.

Таким чином, оскільки $0 < \alpha < 1$,

$$\rho(x_n, x_m) \to 0, n \to \infty, m \to \infty, m > n.$$

Внаслідок повноти простору (X, ρ) в ньому існує границя послідовності $\{x_n\}$. Позначимо її через $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Із теореми 7.3 випливає, що

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо $g(x) = x$ і $g(y) = y$, то $\rho(x, y) \le \alpha\rho(x, y)$, тобто $\rho(x, y) = 0$. за аксіомою тотожності це означає, що $x = y$. ■

Наслідок 7.1. Умову $\alpha \le 1$ не можна замінити на $\alpha < 1$.

Доведення. Якщо відображення $g : (X, \rho) \to (X, \rho)$ має властивість $\rho(g(x), g(y)) < \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X, x \ne y$, то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір $([1, \infty), |x - y|)$ і визначимо відображення $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Тоді $\rho(g(x), g(y)) = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| < |x - y|$. Оскільки для жодного $x \in [1, \infty)$ $g(x) = x + \frac{1}{x} \ne x$, нерухомої точки немає. ■

Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.41–47.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981. — с. 66–75.