6. Метричні простори

Численні поняття і теореми математичного аналізу використовують поняття відстані між точками простору. Зокрема, це стосується границі і неперервності. В багатьох випадках самі теореми та їх доведення залежать не від способу завдання метрики, а лише від їхніх властивостей: невід'ємності, симетрії і нерівності трикутника.

Озн. 6.1. *Нехай X — довільна множина. Відображення $\rho: X \times X \to R^+$ називається **метрикою**, якщо $\forall x, y, z \in X$ воно має такі властивості (аксіоми метрики):*

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксіома тотожності);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Озн. 6.2. *Метричним простором називається пара (X, ρ), де X — множина-носій, а ρ — метрика.*

Приклад 6.1. $\left(R^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \right)$.

Приклад 6.2. $\left(C[a,b], \max_{[a,b]} \left| x(t) - y(t) \right| \right)$.

Озн. 6.3. ***Відкритою кулею*** *радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x_0 \in X$ називається множина*

$$S(x_0, \varepsilon) = \left\{ x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon \right\}.$$

Озн. 6.4. ***Замкненою кулею*** *радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x_0 \in X$ називається множина*

$$S^*(x_0, \varepsilon) = \left\{ x \in X : \rho(x, x_0) \le \varepsilon \right\}.$$

Озн. 6.5. *Множина* $G \subset X$ *називається відкритою в метричному просторі* (X, ρ), *якщо* $\forall x \in G \ \exists S(x, r) \subset G$.

Озн. 6.6. *Множина* $G \subset X$ *називається замкненою, якщо її доповнення є відкритою множиною.*

Озн. 6.7. *Множина метричного простору є* ***обмеженою за відстанню****, або просто* ***обмеженою****, якщо воно міститься в деякій кулі:* $\exists S(x, r) : M \subset S(x, r)$.

Озн. 6.8. *Точка* x *метричного простору* (X, ρ) *називається* ***границею*** *послідовності точок* $x_n \in X$, *якщо* $\rho(x_n, x) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Така збіжність називається збіжністю за відстанню (або за метрикою).*

Цей факт записується так: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Приклад 6.3. В просторі $\left(R^1, |x - y|\right)$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є інтервал $(x_0 - r, x_0 + r)$, а замкненою кулею — сегмент $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Приклад 6.4. В просторі $\left(R^2, \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}\right)$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є коло радіуса r з центром в точці x_0.

Приклад 6.5. В просторі $\left(R^2, |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right)$ одинична куля є ромбом з вершинами (0,1), (1,0), (0,–1) і (0,-1).

Приклад 6.6. В просторі $\left(C[a, b], \max\limits_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|\right)$ околом є смуга, що складається із функцій, які задовольняють умові $\forall t \in [a, b] \ |x(t) - y(t)| < r$.

Лема 6.1. *Для довільних точок* x, x', y, y' *метричного простору* (X, ρ) *виконується нерівність*

$$\left|\rho(x', y') - \rho(x, y)\right| \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Доведення. Із нерівності трикутника випливає:

$$\rho(x', y') \le \rho(x', x) + \rho(x, y') \le \rho(x, x') + \rho(x, y) + \rho(y, y').$$

Отже,

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Аналогічно,

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x') + \rho(x', y) \le \rho(x, x') + \rho(x', y') + \rho(y', y).$$

Звідси випливає, що

$$\rho(x, y) - \rho(x', y') \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Таким чином,

$$\left|\rho(x', y') - \rho(x, y)\right| \le \rho(x, x') + \rho(y, y'). \ \blacksquare$$

Лема 6.2. *Метрика* $\rho(x, y)$ *є неперервною функцію своїх аргументів, тобто якщо* $x_n \to x, y_n \to y$, *то* $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Доведення. Із леми 6.1 випливає, що при $x_n \to x_0, y_n \to y_0$

$$\left|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)\right| \le \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \to 0. \ \blacksquare$$

Теорема 6.1. *Відкрита куля* $S(a,r)$ *в метричному просторі* (X, ρ) *є відкритою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in S(a, r)$.

$$x \in S(a, r) \Rightarrow \rho(x, a) < r.$$

Покладемо $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Розглянемо довільну точку $y \in S(x, \varepsilon)$.

$$y \in S(x, \varepsilon) \Rightarrow \rho(y, x) < \varepsilon.$$

$\rho(y, a) \le \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \Rightarrow y \in S(a, r) \Rightarrow S(x, \varepsilon) \subset S(a, r)$

Таким чином, точка x є внутрішньою точкою множини (a, r), тобто $S(a, r)$ — відкрита множина. ■

Теорема 6.2. *Точка x належить замиканню $\bar{A}$ множини $A \subset X$ в топології, що індукована на X метрикою ρ, тоді і лише тоді, якщо існує послідовність точок множини A, що збігається до точки x.*

Доведення. *Необхідність.*

$$x \in \bar{A} \Rightarrow \forall n \in N\ \exists x_n \in A \cap S\left(x, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(x, x_i) < \frac{1}{n} \Rightarrow x = \lim_{n \to \infty} x_n .$$

Достатність.

$$x \notin \bar{A} \Rightarrow \exists r > 0 : A \cap S(x, r) = \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x' \in A\ \rho(x, x') \ge r \Rightarrow \nexists \{x_n\} : \lim_{n \to \infty} x_n = x . \ ■$$

Наслідок 1. *Теорема 6.2 стверджує, що кожна точка дотику множини в метричному просторі є границею деякої послідовності елементів цієї множини. Отже, топологію метричного простору можна описати не лише за допомогою куль, а й за допомогою збіжних послідовностей.*

Наслідок 2. *Множина є замкненою, якщо всі послідовності її точок збігаються лише до точок цієї ж множини.*

Теорема 6.3. *Замкнена куля $S^*(a, r)$ є замкненою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.*

Доведення. Нехай $x_n \in S^*(a, r)$.

$x_n \in S^*(a, r) \Rightarrow \rho(x_n, a) \le r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = \rho\left(\lim_{n\to\infty} x_n, a\right) = \rho(x, a) \le r \Rightarrow x \in S^*(a, r).$$

Отже, всі граничні точки множини $S^*(a, r)$, які є точками її дотику, належать кулі $S^*(a, r)$. ■

Озн. 6.9. *Послідовність* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *точок метричного простору* (X, ρ) *називається фундаментальною, якщо* $\rho(x_n, x_m) \to 0$ *при* $n \to \infty, m \to \infty$.

Лема 6.3. *Будь-яка збіжна послідовність метричного простору є фундаментальною.*

Доведення. Нехай $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Отже, послідовність є фундаментальною. ■

Лема 6.4. *Будь-яка фундаментальна послідовність точок метричного простору є обмеженою.*

Доведення. Задамо $\varepsilon > 0$ і підберемо натуральне число N так, щоб $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \ge N$. Зокрема, $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ при $n \ge N$. Введемо позначення

$$r = \max\{\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Тепер при всіх $n = 1, 2, \ldots$

$$\rho(x_n, x_N) \le r.$$

Інакше кажучи,

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S^*(x_N, r).$$

Замінюючи число r на будь-яке число $r' > r$, можна заключити послідовність в довільну відкриту кулю:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(x_N, r'). \blacksquare$$

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979. — с.47–50.
2. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с. 60–69.