5. Компактність в топологічних просторах

Велику роль в топології відіграє клас компактних просторів, які мають дуже важливі властивості. Введемо основні поняття.

Озн. 5.1. *Система множин* $S = \{A_i \subset X, i \in I\}$ *називається* ***покриттям*** *простору X, якщо* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$.

Озн. 5.2. *Покриття S називається* ***відкритим*** ***(замкненим)****, якщо кожна із множин* A_i *є* ***відкритою*** ***(замкненою)****.*

Озн. 5.3. *Підсистема P покриття S простору X називається* ***підпокриттям*** *покриття S, якщо сама P утворює покриття X.*

Теорема 5.1. (Ліндельоф). *Якщо простір X має злічену базу, то із його довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття.*

Доведення. Нехай $\beta = \{U_n\}$ — деяка злічена база простору X, а $S = \{G_i, i \in I\}$ — довільне відкрите покриття простору X. Для кожного $x \in X$ позначимо через $G_n(x)$ один із елементів покриття S, що містить точку x, а через $U_n(x)$ — один із елементів бази β, що містить точку x і цілком міститься у відкритій множині G_n (теорема 2.3).

$$x \in U_n(x) \subset G_n(x).$$

Відібрані нами множини $U_n(x) \in \beta$ утворюють злічену множину. Крім того, кожна точка x простору X міститься в деякій множині $U_n(x)$, отже

$$\bigcup_{x \in X} U_n(x) = X.$$

Вибираючи для кожного $U_n(x)$ відкриту множину $G_n(x)$, ми отримаємо не більш ніж злічену систему, яка є підпокриттям покриття S. ■

Озн. 5.4. *Топологічний простір* (X,τ)*, в якому із довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття, називається* ***ліндельофовим****, або* ***фінально компактним****.*

Звузимо клас ліндельофових просторів і введемо наступне поняття.

Озн. 5.5. *Топологічний простір* (X,τ) *називається* ***компактним*** ***(бікомпактним)****, якщо будь-яке його відкрите покриття містить скінченне підпокриття (умова Бореля–Лебега).*

Приклад 5.1. Простір з тривіальної топологією є компактним.

Приклад 5.2. Простір з дискретною топологією є компактним тоді і лише тоді, коли він складається із скінченної кількості точок.

Приклад 5.3. Простір Зариського є компактним.

Приклад 5.4. Простір $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ не є компактним.

Теорема 5.2 (перший критерій компактності). *Для компактності топологічного простору* (X,τ) *необхідно і достатньо, щоб будь-яка сукупність його замкнених підмножин з порожнім перетином містила скінченну підмножину таких множин із порожнім перетином.*

(X,τ) — компактний $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \left\{ \overline{F}_\alpha, \alpha \in A : \bigcap_{\alpha\in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing \right\} \ \exists \left\{ \overline{F}_{\alpha_1}, \overline{F}_{\alpha_2}, \dots, \overline{F}_{\alpha_n} \right\} : \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing .$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай (X,τ) — компактний, а $\left\{ \overline{F}_\alpha, \alpha \in A \right\}$ — довільна сукупність замкнених множин, що задовольняє умові $\bigcap_{\alpha\in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing$. Розглянемо множини

$U_\alpha = X \setminus \overline{F}_\alpha$. За правилами де Моргана (принцип двоїстості) сукупність множин $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ задовольняє умові $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$, тобто утворює покриття простору (X,τ). Оскільки, за припущенням, (X,τ) — компактний простір, то існує скінченна підмножина множин $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$, які також утворюють покриття: $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$. Отже, за правилами де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n}\left(X \setminus \overline{F}_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing.$$

Достатність. Нехай $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — довільне відкрите покриття простору (X,τ). Очевидно, що множини $\overline{F}_\alpha = X \setminus U_\alpha, \alpha \in A$ є замкненими, а їх сукупність має порожній перетин: $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing$. За умовою, ця сукупність містить скінченну підмножину множин $\{\overline{F}_{\alpha_1}, \overline{F}_{\alpha_2}, ..., \overline{F}_{\alpha_n}\}$, таку що $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing$. Звідси випливає, що множини U_{α_n}, які є доповненнями множин $\overline{F}_{\alpha_n}$, утворюють покриття простору (X,τ), тобто простір (X,τ) є компактним. ■

Озн. 5.6. *Система підмножин* $\{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\}$ *називається* ***центрованою****, якщо перетин довільної скінченної кількості цих підмножин є непорожнім.*

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \in A \ \bigcap_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} \neq \varnothing \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\}$ — центрована система.

Теорема 5.3 (другий критерій компактності). *Для компактності топологічного простору* (X,τ) *необхідно і достатньо, щоб будь-яка центрована система його замкнених підмножин мала непорожній перетин.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір (X,τ) — компактний, а $\{F_\alpha\}$ — довільна центрована система замкнених підмножин. Множини $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ відкриті. Жодна скінченна система цих множин $G_{\alpha_n}, 1 \le n < \infty$ не покриває X, оскільки

$$\forall n \in N \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \ne \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(X \setminus F_{\alpha_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \ne X \setminus \varnothing = X \ .$$

Отже, оскільки (X,τ) — компактний простір, система $\{G_\alpha\}$ не може бути покриттям компактного простору. Інакше ми могли б вибрати із системи $\{G_\alpha\}$ скінченне підпокриття $\{G_{\alpha_1},...,G_{\alpha_n}\}$, а це означало б, що $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$. Але, якщо $\{G_\alpha\}$ — не покриття, то $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \ne \varnothing$:

$$\bigcup_{\alpha} G_\alpha \ne X \Rightarrow X \setminus \bigcup_{\alpha} G_\alpha \ne X \setminus X = \varnothing \Rightarrow \bigcap_{\alpha} \left(X \setminus G_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha} F_\alpha \ne \varnothing .$$

Достатність. Припустимо, що довільна центрована система замкнених множин із X має непорожній перетин. Нехай $\{G_\alpha\}$ — відкрите покриття (X,τ). Розглянемо множини $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$. Тоді

$$\bigcup_{\alpha} G_\alpha = X \Rightarrow X \setminus \bigcup_{\alpha} G_\alpha = X \setminus X = \varnothing \Rightarrow \bigcap_{\alpha} \left(X \setminus G_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha} F_\alpha = \varnothing .$$

Це означає, що система $\{F_\alpha\}$ не є центрованою, тобто існують множини $F_1, F_2, ..., F_N$, такі що

$$\bigcap_{i=1}^{N} F_i = \varnothing \Rightarrow X \setminus \bigcap_{i=1}^{N} F_i = X \setminus \varnothing = X \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{N} G_i = X .$$

Отже, із покриття $\{G_\alpha\}$ ми виділили скінчену підсистему

$$\{G_1, ..., G_N\} = \{X \setminus F_1, ..., X \setminus F_N\},$$

таку що $\bigcup_{\alpha=1}^{N} G_\alpha = X$. Це означає, що простір (X, τ) є компактним. ■

Озн. 5.7. *Множина $M \subset X$ називається* ***компактною (бікомпактною)****, якщо топологічний підпростір (M, τ_M), що породжується індукованою топологією, є компактним.*

Озн. 5.8. *Множина $M \subset X$ називається* ***відносно компактною (відносно бікомпактною)****, якщо її замикання $\bar{M}$ є компактною множиною.*

Озн. 5.9. *Компактний і хаусдорфів простір називається* ***компактом*** (***бікомпактом***).

Озн. 5.10. *Топологічний простір (X, τ) називається* ***зліченно компактним****, якщо із його довільного зліченного відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття (умова Бореля).*

Озн. 5.11. *Топологічний простір (X, τ) називається* ***секвенційно компактним****, якщо довільна нескінченна послідовність його елементів містить збіжну підпослідовність (умова Больцано-Вейєрштрасса).*

Теорема 5.4 (перший критерій зліченної компактності). *Для того щоб простір* (X,τ) *був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна його нескінченна підмножина мала принаймні одну строгу граничну точку, тобто точку, в довільному околі якої міститься нескінченна кількість точок підмножини.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай (X,τ) — зліченно компактний простір, а M — довільна нескінченна множина в X. Припустимо, усупереч твердженню, що M не має жодної строгої граничної точки. Розглянемо послідовність замкнених множин $\Phi_n \subset M$, таку що $\Phi_n \subset \Phi_{n+1}$. Візьмемо $x_n \in \Phi_n$. За припущенням нескінченна послідовність точок $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ не має строгих граничних точок. Побудуємо скінченну систему підмножин $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, поклавши $F_n = \{x_n, x_{n+1}, ..., ...\}$. Із структури цих множин випливає, що будь-яка скінченна сукупність точок F_n має непорожній перетин, всі множини F_n є замкненими, але $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$. Отже, ми побудували зліченну центровану систему замкнених множин, перетин яких порожній, що суперечить припущенню, що простір (X,τ) зліченно компактним.

Достатність. Нехай в просторі (X,τ) кожна нескінченна множина M має строгу граничну точку. Доведемо, що простір (X,τ) є зліченно компактним. Для цього достатньо перевірити, що будь-яка зліченна центрована система $\{F_n\}$ замкнених множин має непорожній перетин. Побудуємо множини $\hat{F}_m = \bigcap_{k=1}^{m} F_k$.

Оскільки система $\{F_n\}$ є центрованою, то замкнені непорожні множини $\hat{F}_m$ утворюють послідовність $\hat{F}_1, \hat{F}_2, ..., \hat{F}_m, ...$, що не зростає. Очевидно, що $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m$. Можливі два варіанти: серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, або нескінченна кількість таких множин. Розглянемо ці варіанти окремо.

1). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, то починаючи з деякого номера m_0 виконується умова $F_{m_0} = F_{m_0+1} = ...$. Тоді твердження доведено, оскільки $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m = \hat{F}_{m_0} \neq \varnothing$.

2). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише нескінченна кількість попарно різних множин, то можна вважати, що $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1} \neq \varnothing$. Оберемо по одній точці з кожної множини $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1}$. Отже, ми побудували нескінченну множину різних точок, яка, за умовою, має граничну точку x^*. Всі точки $x_m, x_{m+1}, ...$ належать множинам $\hat{F}_m$. Отже, $x^* \in \hat{F}'_m \ \ \forall m \in \mathbb{N}$, до того ж $\overline{\hat{F}_m} = \hat{F}_m$. З цього випливає, що $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m \neq \varnothing$. ■

Зауваження 5.1. Вимогу наявності строгої граничної точки можна замінити аксіомою T_1. Інакше кажучи, в досяжних просторах будь-яка гранична точка є строгою. Припустимо, що X — досяжний простір, а гранична точка x множини A не є строгою, і тому існує деякий окіл U, що містить лише скінчену кількість точок множини A, що відрізняються від x. Розглянемо множину

$V = U \setminus \left(\left(A \cap U \right) \setminus \{x\} \right)$, тобто різницю між множиною U і цим скінченним перетином. Оскільки простір X є досяжним, то в ньому будь-яка скінченна множина є замкненою. Отже, множина V є відкритою ($V = X \cap \left(U \setminus \{A \cap U \setminus \{x\}\} \right) = U \cap \left(X \setminus \left(U \cap A \setminus \{x\} \right) \right)$, містить точку x, а перетин множин дорівнює $A \cap V = \{x\}$ або $\varnothing$. Це суперечить тому, що x — гранична точка множини A.

Зауваження 5.2. Чому не можна взагалі зняти умову наявності строгої граничної точки? Розглянемо як контрприклад топологію, що складається з натуральних чисел на відрізку $[1, n]$, тобто $\tau = \left\{ \varnothing, \mathbb{N}, [1, n] \cap \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \right\}$. Цей простір не є зліченно компактним (порушується другий критерій компактності). Розглянемо нескінченну множину $A \subset \mathbb{N}$ і покладемо $n = \min A$. Тоді будь-який $m \in A \setminus \{n\}$ є граничною точкою множини A, тобто $\mathbb{N}$ є слабко зліченно компактним простором.

Теорема 5.5 (другий критерій зліченної компактності). *Для того щоб досяжний простір (X, τ) був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна нескінченна множина точок із X мала принаймні одну граничну точку (такі простори називаються слабко зліченно компактними). Інакше кажучи, в досяжних просторах слабка зліченна компактність еквівалентна зліченній компактності.*

Доведення. *Необхідність*. Припустимо, що A — злічена підмножина X, що не має граничних точок (це не обмежує загальності, оскільки в будь-якій нескінченій підмножині ми можемо вибрати злічену підмножину). Множина A є замкненою в X (оскільки будь-яка точка множини $\overline{A} \setminus A$ є граничною точкою множини A, яка за припущенням не має граничних точок, тому $\overline{A} = A$). Нехай $A = \{a_1, a_2, ...\}$ і $A_n = \{a_n, a_{n+1}, ...\}$. Із сказаного вище випливає, що $A_n = \overline{A}_n$, інакше $A' \neq \varnothing$. Покладемо $G_n = X \setminus A_n$. Ця множина є доповненням замкненої множини A_n, тому вона є відкритою. Розглянемо послідовність множин G_n. Вона зростає і покриває X, тому що кожна точка x із множини $X \setminus A$ належить G_1, а значить, усім множинам G_n, а якщо $x \in A$, то вона дорівнює якомусь a_N, отже, належить G_{N+1}. Таким чином, послідовність множин G_n є покриттям, але вона не може містити скінченне підпокриття $\{G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_m}\}$, оскільки об’єднання елементів цього скінченного підпокриття було б найбільшим серед усіх множин G_n (які утворюють зростаючу послідовність).

$$G_1 \subset G_2 \subset ... \subset \bigcup_{k=1}^{m} G_{i_k} = G_N = X .$$

У цьому випадку об’єднання $G_N = \bigcup_{k=1}^{m} G_{i_k}$ не може містити усі елементи a_i, номер яких перевищує N (за конструкцією), отже, воно не покриває X. У такому випадку простір X не є зліченно компактним. Отримане протиріччя доводить бажане.

Достатність. Припустимо, що простір X не є зліченно компактним. Значить, існує зліченне відкрите покриття $\{G_n\}_{n \in \Gamma}$, що не містить скінченного підпокриття. Оскільки жодна сукупність множин $\{G_1, G_2, ..., G_i\}$ не є покриттям, виберемо з множин $X \setminus \bigcup_{k=1}^{i} G_i$ по одній точці x_i і утворимо із них множину A.

Розглянемо довільну точку $x \in X$. Оскільки $\{G_n\}_{n\in\Gamma}$ — покриття простору X, точка x належить якійсь множині G_N, яка в свою чергу може містити лише такі точки x_i із множини A, номер яких задовольняє умові $i < N$ (оскільки за означенням точка x_i не належить жодному G_j, якщо $j \le i$). Отже, множина G_N є околом точки x, перетин якої із множиною A є лише скінченним. В той же час, оскільки простір є досяжним, в околі граничної точки будь-якої множини повинно міститись нескінченна кількість точок цієї множини. Отже, точка x не є граничною точкою множини A. Це твердження є слушним для будь-якої точки x, отже, множина A не має жодної граничної точки. Отримане протиріччя доводить бажане. ■

Теорема 5.6 (про еквівалентність компактності і зліченої компактності). *Для топологічного простору (X, τ) із зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай (X, τ) — компактний простір. Тоді із *довільного* відкритого покриття можна виділити скінченне покриття. Значить, скінченне покриття можна виділити із зліченного відкритого покриття.

Достатність. Нехай (X, τ) є зліченно компактним простором, а $S = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — його довільне відкрите покриття. Оскільки простори із зліченою базою мають властивість Ліндельофа (теорема 5.1), то покриття S

містить підпокриття S', яке, внаслідок, зліченної компактності простору (X,τ) містить скінченне підпокриття S''. Отже, простір (X,τ) є зліченно компактним. ■

Теорема 5.7 (про еквівалентність компактності, секвенційної компактності і зліченної компактності). *Для досяжних просторів із зліченою базою компактність, секвенційна компактність і зліченна компактність є еквівалентними.*

Доведення. З огляду на теорему 5.6, достатньо показати, що злічена компактність в досяжному просторі із зліченною базою еквівалентна секвенційній компактності.

Необхідність. Розглянемо зліченно компактний простір (X,τ). Нехай $A=\{x_n\}_{n\in\Gamma}$ — довільна нескінченна послідовність (тобто послідовність, що містить нескінченну кількість різних точок), а простір є зліченно компактним. Отже, за теоремою 5.5, множина A має граничну точку x^*. Розглянувши зліченну локальну базу околів $\{G_k\}_{k\in\Gamma}$ точки x^*, так що $G_{k+1}\subset G_k$, можна виділити послідовність x_{n_k}, що збігається до x^*. Отже, простір (X,τ) є секвенційно компактним.

Достатність. Нехай простір (X,τ) є секвенційно компактним. Із теореми 5.4 випливає, що будь-яка зліченна нескінченна підмножина простору X має строгу граничну точку. Це означає, що будь-яка нескінченна зліченна послідовність має граничну точку, тобто із неї можна виділити збіжну підпослідовність.

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979, с. 225–238.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981, с. 98–105.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986, с. 195–215.