4. Аксіоми віддільності

Аналізуючи властивості різних топологічних просторів ми бачили, що їх структура може бути настільки “неприродною”, що будь-яка послідовність збігається до будь-яких точок (тривіальний простір), існують точки дотику множин, які не є границями послідовностей їх елементів (простір Зариського) тощо. В математичному аналізі ми не зустрічаємо таких “патологій”: там всі послідовності мають лише одну границю, кожна точка дотику є границею тощо. Отже, виникає потреба в інструментах, які дозволили ли б виділити серед топологічних просторів “природні” простори. Такими інструментами є аксіоми віддільності, які разом з аксіомами зліченності дають можливість повністю описати властивості топологічних просторів.

Аксіоми віддільності в топологічному просторі (X,τ) формулюються наступним чином.

T_0 (Колмогоров, 1935). *Для двох довільних різних точок* x *і* y, *що належать множині* X, *існує множина із топологічної структури* τ, *яка містить рівно одну з цих точок.*

$\forall x, y\in X : x\neq y\ \exists V_x\in\tau : x\in V_x, y\notin V_x \vee \exists V_y\in\tau : y\in V_y, x\notin V_y.$

T_1 (Рісс, 1907). *Для двох довільних різних точок* x *і* y, *що належать множині* X, *існують множина* V_x *із топологічної структури* τ, *яка містить точку* x *і не містить точки* y, *і множина* V_y *із топологічної структури* τ, *яка містить точку* y *і не містить точки* x.

$$\forall x, y\in X : x\neq y\ \exists V_x, V_y\in\tau : x\in V_x, y\in V_y, x\notin V_y, y\notin V_x$$

T_2 (Хаусдорф, 1914). *Для двох довільних різних точок* x *і* y*, що належать множині* X*, існують множина* V_x *із топологічної структури* τ*, яка містить точку* x*, і множина* V_y *із топологічної структури* τ*, яка містить точку* y*, такі що не перетинаються.*

$\forall x, y \in X : x \neq y \ \exists V_x, V_y \in \tau : x \in V_x, y \in V_y, V_x \bigcap V_y = \varnothing$

T_3 (В’єторіс, 1921). *Для довільної точки* x *і довільної замкненої множини* F*, що не містить цієї точки, існують дві відкриті множини* V_x *і* V*, що не перетинаються, такі що* $x \in V_x$*, а* $F \subset V$.

$\forall x \in X, \overline{F} \subset X : x \notin \overline{F} \ \exists V_x, V \in \tau : x \in V_x, F \subset V, V_x \bigcap V = \varnothing$.

$T_{3\frac{1}{2}}$ (Урисон, 1925). *Для довільної точки* x *і довільної замкненої множини* $\overline{F}$*, що не містить цієї точки, існує неперервна числова функція* f*, задана на просторі* X*, така що* $0 \leq f(t) \leq 1$*, до того ж* $f(x) = 0$ *і* $f(t) = 1$*, якщо* $x \in \overline{F}$.

$$\forall x \in X, \overline{F} \subset X : x \notin \overline{F} \ \exists f : X \to R^1 :$$
$$0 \leq f(t) \leq 1, f(x) = 0, f(t) = 1, \ \text{якщо}\ t \in \overline{F}.$$

T_4 (В’єторіс, 1921). *Для двох довільних замкнених множин* $\overline{F_1}$ *і* $\overline{F_2}$*, що не перетинаються, існують відкриті множини* G_1 *і* G_2*, що не перетинаються, такі що* $\overline{F_1} \subset G_1$*,* $\overline{F_2} \subset G_2$.

$$\forall \overline{F_1}, \overline{F_2} \subset X : \overline{F_1} \bigcap \overline{F_2} = \varnothing \ \exists G_1, G_2 \in \tau :$$
$$\overline{F_1} \subset G_1, \overline{F_2} \subset G_2, G_1 \bigcap G_2 = \varnothing.$$

Озн. 4.1 (Колмогоров, 1935)**.** *Топологічні простори, що задовольняють аксіому T_0, називаються T_0-**просторами**, або **колмогоровськими**.*

Озн. 4.2 (Рісс, 1907). *Топологічні простори, що задовольняють аксіому T_1, називаються T_1-**просторами**, або **досяжними**.*

Озн. 4.3 (Хаусдорф, 1914). *Топологічні простори, що задовольняють аксіому T_2, називаються **хаусдорфовими**, або **віддільними**.*

Озн. 4.4 (В’єторіс, 1921). *Топологічні простори, що задовольняють аксіоми T_1 і T_3, називаються **регулярними**.*

Озн. 4.5 (Тихонов, 1930). *Топологічні простори, що задовольняють аксіоми T_1 і $T_{3\frac{1}{2}}$, називаються **цілком регулярними**, або **тихоновськими**.*

Озн. 4.6 (Тітце (1923), Александров і Урисон (1929)). *Топологічні простори, що задовольняють аксіоми T_1 і T_4, називаються **нормальними**.*

Розглянемо наслідки, які випливають із аксіом віддільності.

Теорема 4.1 (критерій досяжності). *Для того щоб топологічний простір (X,τ) був T_1-простором необхідно і достатньо, щоб будь-яка одноточкова множина $\{x\}\subset X$ була замкненою.*

Доведення. *Необхідність*. Припустимо, що виконується перша аксіома віддільності: якщо $x\neq y$, то існує окіл $V_y\in\tau : x\notin V_y$. Тоді $\forall y\neq x\ y\notin\overline{\{x\}}$, тобто $\overline{\{x\}}=\{x\}$.

Достатність. Припустимо, що $\overline{\{x\}}=\{x\}$. Тоді $\forall y \neq x\, \exists V_y \in \tau : x \notin V_y$. Отже виконується перша аксіома віддільності. ■

Наслідок. *В просторі T_1 будь-яка скінченна множина є замкненою.*

Теорема 4.2. *Для того щоб точка x була граничною точкою множини M в T_1-просторі необхідно і достатньо, щоб довільний окіл U цієї точки містив нескінченну кількість точок множини M.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо точка x є граничною точкою множини M, то

$$\forall O(x) \in \tau \;\; O(x) \cap M \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

Припустимо, що існує такий окіл U точки x, що містить лише скінченну кількість точок $x_1, x_2, ..., x_n \in M$. Оскільки простір (X, τ) є T_1-простором, то існує окіл U_i точки x, що не містить точку x_i. Введемо в розгляд множину $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Ця множина є околом точки x, що не містить точок множини M, за винятком, можливо, самої точки x. Отже, точка x не є граничною точкою множини M, що суперечить припущенню.

Достатність. Якщо довільний окіл U точки x містить нескінченну кількість точок множини M, то вона є граничною за означенням.■

Приклад 4.1. Зв'язна двокрапка є колмогоровским, але недосяжним простором.

Приклад 4.2. Простір Зариського є досяжним, але не хаусдорфовим.

Теорема 4.3 (критерій хаусдорфовості). *Для того щоб простір (X,τ) був хаусдорфовим необхідно і достатньо, щоб для кожної пари різних точок x_1 і x_2 в X існувало неперервне ін'єктивне відображення f простору X в хаусдорфів простір Y.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір (X,τ) є хаусдорфовим. Тоді можна покласти $Y = X$ і $f = I$ — тотожне відображення.

Достатність. Нехай (X,τ) — топологічний простір і $\forall x_1 \neq x_2 \, \exists f : X \to Y,\ f(x_1) \neq f(x_2)$, де Y — хаусдорфів, а f — неперервне відображення. Оскільки простір Y є хаусдорфовим, то

$$\exists O(f(x_1)) \in \tau_Y, O(f(x_2)) \in \tau_Y : O(f(x_2)) \cap O(f(x_2)) = \varnothing.$$

Оскільки відображення f є неперервним, то

$\exists O(x_1) \in \tau_X, O(x_2) \in \tau_Y : f(O(x_1)) \subset O(f(x_1))$, $f(O(x_2)) \subset O(f(x_2))$. Тоді околи $V(x_1) = f^{-1} f(O(x_1))$ і $V(x_2) = f^{-1} f(O(x_2))$ не перетинаються. ■

Озн. 4.7. *Замкнена множина, що містить точку x разом з деяким її околом, називається* ***замкненим околом*** *точки x.*

Теорема 4.4 (критерій регулярності). *Для того щоб T_1-простір (X,τ) був регулярним необхідно і достатньо, щоб довільний окіл U довільної точки x містив її замкнений окіл.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір (X,τ) є регулярним, x — його довільна точка, а U — її довільний окіл. Покладемо $F = X \setminus U$. Тоді внаслідок регулярності простору (X,τ) існує окіл V точки x і окіл W множини F, такі що $V\bigcap W=\varnothing$. Звідси випливає, що $V\subset X\setminus W$, отже, $\overline{V}\subset\overline{X\setminus W}=X\setminus W\subset X\setminus F=U$.

Достатність. Нехай довільний окіл довільної точки x містить замкнений окіл цієї точки, а F — довільна замкнена множина, що не містить точку x. Покладемо $G=X\setminus F\in\tau$. Нехай V — замкнений окіл точки x, що міститься в множині G. Тоді $W=X\setminus V$ є околом множини F, який не перетинається з множиною V. ■

Приклад 4.4. Розглянемо множину $X=\mathbb{R}$ і введемо топологію так: замкненими будемо вважати всі множини, що є замкненими у природній топології числової прямой, а також множину $A=\left\{\frac{1}{n}, n=1,2,....\right\}$. Точка нуль їй не належить, але будь-які околи точки нуль і довільні околи множини A перетинаються. Це означає, що побудований простір не є регулярним, але є хаусдорфовим.

Озн. 4.8. Система $\gamma=\{A_i, i\in I\}$ замкнених підмножин простору X називається його *замкненою базою*, якщо будь-яку замкнену в X множину можна подати у вигляді перетину множин із системи γ. Система $\delta=\{B_j\}$ замкнених підмножин B_j називається *замкненою передбазою*, якщо будь-яку замкнену в X множину можна подати у вигляді перетину скінченних об’єднань множин із системи δ.

Озн. 4.9. *Підмножини A і B простору X називаються функціонально віддільними, якщо існує дійсна неперервна функція* $f: X\to[0,1]$ *така, що* $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\in A,\\ 1, \text{ якщо } x\in B.\end{cases}$

Оскільки замкнені бази і передбази є двоїстими до відкритих, мають місце наступні твердження.

Лема 4.1. *Для того щоб система* $\gamma = \{A_i, i \in I\}$ *замкнених множин із* X *була замкненою базою в* X, *необхідно і достатньо, щоб для кожної точки* $x_0 \in X$ *і для кожної замкненої множини* F_0, *що не містить точку* x_0, *існувала множина* $A_{j_0} \in \gamma$ *така, що* $x_0 \notin A_{j_0} \supset F_0$.

Лема 4.2. *Для того щоб система* $\delta = \{B_j, j \in J\}$ *замкнених множин із* X *була замкненою передбазою в* X, *необхідно і достатньо, щоб для кожної точки* $x_0 \in X$ *і для кожної замкненої множини* F_0, *що не містить точку* x_0, *існував скінченний набір елементів* $B_{j_1}, B_{j_2}, ..., B_{j_n}$ *такий, що* $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k} \supset F_0$.

Теорема 4.5 (критерій цілковитої регулярності). *Для того щоб* (X, τ) *був цілком регулярним (тихоновським) необхідно і достатньо, щоб кожна його точка* x_0 *була функціонально віддільною від усіх множин із деякої замкненої передбази* $\delta = \{F_i, i \in I\}$, *що її не містять.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо простір (X, τ) є цілком регулярним (тихоновським), то точка x_0 є функціонально віддільною від *усіх* замкнених множин, що її не містять, а значить, і від усіх множин із деякої замкненої передбази $\delta = \{F_i, i \in I\}$, що її не містять.

Достатність. Нехай F_0 — довільна замкнена в X множина, що не містить точку x_0, і нехай $F_{i_1}, ..., F_{i_n}$ —

скінченний набір елементів із δ такий, що $x_0 \notin \overline{F} = \bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k} \supset F_0$ (за лемою 4.2). За припущенням, існує неперервна функція $f_k : X \to [0,1]$, яка здійснює функціональну віддільність точки x_0 і замкненої множини F_{i_k}. Покладемо $f(x) = \sup_k f_k(x)$ і покажемо, що функція f здійснює функціональну віддільність точки x_0 і множини F, а тим більше, точки x_0 і множини $F_0 \subset F$.

Дійсно, $f(x_0) = \sup_k f_k(x_0) = 0.$ Далі, оскільки $\forall k = 1,\dots,n \;\; f_k(x) \le 1$, із $x \in F$ випливає, що $f(x) = \sup_k f_k(x) = 1.$ Крім того, із того що $x \in F = \bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k}$ випливає, що $x \in F_{i_m}$, $1 \le m \le n$, тобто $f_m(x) = 1.$

Залишилося показати неперервність побудованої функції. Для цього треба довести, що $\forall x' \in X$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U \in \tau : x' \in U$: $\forall x \in U \; \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon.$ Оскільки f_k — неперервна функція, то існує окіл U_k точки x', такий що $\forall x \in U_k \; \left| f_k(x) - f_k(x') \right| < \varepsilon.$ Покладемо $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Тоді для кожного $x \in U$ і $\forall k = 1,\dots,n$ виконуються нерівності

$$f_k(x') - \varepsilon < f_k(x) \le \sup_k f_k(x) = f(x),$$

$$f_k(x) < f_k(x') + \varepsilon \le \sup_k f_k(x') + \varepsilon = f(x') + \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $f(x') - \varepsilon < f(x) < f(x') + \varepsilon.$ ■

Зауваження. Побудова регулярних просторів, які не є тихоновськими є нетривіальною задачею.

Мала лема Урисона (критерій нормальності). *Досяжний простір X є нормальним тоді і лише тоді, коли для кожної замкненої підмножини $F \subset X$ і відкритої множини U, що її містить, існує такий відкритий окіл V множини F, що $\overline{V} \subset U$, тобто коли кожна замкнена підмножина має замкнену локальну базу.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай простір X є нормальним. Розглянемо замкнену множину F та її окіл U. Покладемо $F' = X \setminus U$. Оскільки $F \bigcap F' = \varnothing$, то існує відкритий окіл V множини F і відкритий окіл V' множини F', такі що $V \bigcap V' = \varnothing$. Отже, $V \subset X \setminus V'$. З цього випливає, що $\overline{V} \subset \overline{X \setminus V'} = X \setminus V' \subset X \setminus F' = U$.

Достатність. Нехай умови леми виконані, а F і F' — довільні диз’юнктні замкнені підмножини простору X. Покладемо $U = X \setminus F'$. Тоді, оскільки множина U є відкритим околом множини F, то за умовою леми, існує окіл V множини F, такий що $\overline{V} \subset U$. Покладаючи $V' = X \setminus \overline{V}$ безпосередньо переконуємося, що множини V і V' не перетинаються і є околами множини F і F'. ■

Велика лема Урисона. *Будь-які непорожні диз’юнктні замкнені підмножини нормального простору є функціонально віддільними.* (Без доведення.)

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 191–206).
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981 (стр. 94–97).
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986 (стр. 69–85).