3. Збіжність і неперервність

В основі поняття збіжності послідовностей в топологічних просторах лежать аксіоми зліченності, які в свою чергу використовують поняття локальної бази в точці.

Озн. 3.1. *Система* β_{x_0} *відкритих околів точки* x_0 *називається* ***локальною базою в точці*** $\boldsymbol{x_0}$*, якщо кожний окіл* U *точки* x_0 *містить її деякий окіл* V *із системи* β_{x_0} .

Озн. 3.2. *Топологічний простір X називається таким, що* ***задовольняє першій аксіомі зліченності****, якщо в кожній його точці існує локальна база, що складається із не більш ніж зліченої кількості околів цієї точки.*

Озн. 3.3. *Топологічний простір X називається таким, що* ***задовольняє другій аксіомі зліченності****, або* ***простором із зліченною базою****, якщо воно має базу, що складається із не більш ніж зліченої кількості відкритих множин.*

Лема 3.1. *Якщо простір X задовольняє другій аксіомі зліченності, то він задовольняє і першій аксіомі зліченності.*

Доведення. Нехай U_1, U_2, ... , U_n, ... — зліченна база в просторі X, тоді $\beta_{x_0} = \{U_k \in \beta : x_0 \in U_k\}$ — зліченна локальна база в точці x_0.

Лема 3.2. *Існують простори, що задовольняють першій аксіомі зліченності, але не задовольняють другій аксіомі зліченності.*

Доведення. В якості контрприкладу розглянемо довільну *незліченну* множину X, в якій введено дискретну топологію $\tau=\{\varnothing, X, 2^X\}$. ■

Приклад 3.1. Простір R^n, топологія якого утворена відкритими кулями, задовольняє першій аксіомі зліченності, оскільки в кожній точці $x_0 \in X$ існує зліченна локальна база

$S(x_0, 1/n)$. Очевидно, що цей простір задовольняє і другій аксіомі зліченності, оскільки має зліченну базу, що складається з куль $S(x_n, r)$, де центри куль x_n належать зліченній скрізь щільній множині (наприклад, мають раціональні координати), а r — раціональне число.

Поняття точки дотику і замикання множини відіграють основну роль в топології, оскільки будь-яка топологічна структура повністю описується в цих термінах.

Проте поняття точки дотику занадто абстрактне. Набагато більше змістовних результатів можна отримати, якщо виділити широкий клас просторів, топологічну структуру яких можна описати виключно в термінах границь збіжних послідовностей.

Озн. 3.4. *Послідовність точок $\{x_n\}$ топологічного простору X називається збіжною до точки $x_0 \in X$, якщо кожний окіл U_0 точки x_0 містить всі точки цієї послідовності, починаючи з деякої. Точку x_0 називають границею цієї послідовності:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Приклад 3.2. В довільному тривіальному просторі послідовність збігається до будь-якої точки цього простору.

Довільна гранична точка множини A довільного топологічного простору X є точкою дотику. Проте в загальних топологічних просторах не для всякої точки дотику $x \in \overline{A}$ існує послідовність $\{x_n\} \in A$, що до неї збігається.

Приклад 3.3. Нехай X — довільна незліченна множина. Задамо в просторі X топологію, оголосивши відкритими порожню множину і всі підмножини, які утворені із X викиданням не більш ніж зліченної кількості точок.

$$\tau = \{\varnothing, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}\}.$$

Спочатку покажемо, що в цьому просторі збіжними є лише стаціонарні послідовності. Припустимо, що в просторі існує нестаціонарна послідовність $\{x_n\} \to x_0$. Тоді, взявши в якості околу точки x_0 множину U, яка утворюється викиданням із X всіх членів послідовності $\{x_n\}$, які відрізняються від точки x_0, ми дійдемо до протиріччя з тим, що окіл U мусить містити всі точки послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякої.

Тепер розглянемо підмножину $A = X \setminus \{x_0\}$. Точка x_0 є точкою дотику множини A. Справді, якщо U — довільний відкритий окіл точки x_0, то за означенням відкритих в X множин, доповнення $X \setminus U$ є не більш ніж зліченим.

$U \in \tau \Rightarrow U = X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \setminus U = X \setminus X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap U \neq \varnothing$ (оскільки card $A = c$, а доповнення $X \setminus U$ і тому не може містити в собі незліченну множину A).

З іншого боку, оскільки в просторі X збіжними є лише стаціонарні послідовності, то із $x_0 \notin A$ випливає, що жодна послідовність точок із множини A не може збігатися до точки дотику $x_0 \notin A$.

Теорема 3.1. *Якщо простір X задовольняє першій аксіомі зліченності, то $x_0 \in \overline{A}$ тоді і лише тоді, коли x_0 є границею деякої послідовності $\{x_n\}$ точок із A.*

Доведення. *Достатність.* Якщо в довільному топологічному просторі $\{x_n\} \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $x_0 \in \overline{A}$.

Необхідність. Нехай $x_0 \in \overline{A}$. Якщо $x_0 \in A$, достатньо в якості $\{x_n\} \in A$ взяти стаціонарну послідовність.

Припустимо, що $x_0 \in \bar{A} \setminus A$ і $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ — зліченна локальна база в точці x_0, до того ж $\forall n \in N$ $U_{n+1} \subset U_n$. (Якщо б ця умова не виконувалася, ми взяли б іншу базу $\{V_n\}$, де $V_n = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$). Оскільки $A \cap U_n \neq \varnothing$, взявши за x_n довільну точку із $A \cap U_n$, ми отримаємо послідовність $\{x_n\} \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Дійсно, нехай V — довільний окіл точки x_0. Оскільки $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ база в точці x_0, існує такий елемент U_{n_0}, який належить цій базі, що $U_{n_0} \subset V$. З іншого боку, для всіх $n \geq n_0$ $U_{n+1} \subset U_n$. Це означає, що $\forall n \geq n_0$ $x_n \in A \cap U_n \subset U_{n_0} \subset U$. Отже, $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. ■

Поняття неперервного відображення належить до фундаментальних основ топології.

Озн. 3.5. *Відображення* $f : X \to Y$ *називається* ***сюр'єктивним****, якщо* $f(X) = Y$, *тобто множина X відображається на весь простір Y.*

Озн. 3.6. *Відображення* $f : X \to Y$ *називається* ***ін'єктивним****, якщо з того, що* $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$, *тобто відображення є однозначним.*

Озн. 3.7. *Відображення* $f : X \to Y$, *яке одночасно є сюр'єктивним та ін'єктивним, називається* ***бієктивним****, або взаємно однозначною відповідністю між X і Y.*

Тепер нагадаємо основні співвідношення для образів та прообразів множин відносно функції $f : X \to Y$.

Якщо $A, B \subset X$, то

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \not\Rightarrow A \subset B$;

2. $A \neq \varnothing \Rightarrow f(\varnothing) \neq \varnothing$;
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Якщо $A', B' \subset Y$, то

5. $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$;
6. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;
7. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

Якщо $B' \subset A' \subset Y$, то

8. $f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$;
9. $f^{-1}(Y \setminus B') = X \setminus f^{-1}(B')$

Для довільних множин $A \subset X$ і $B' \subset Y$

10. $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$;
11. $f\left(f^{-1}(B')\right) \subset B'$.

Введемо поняття неперервного відображення.

Озн. 3.8. *Нехай X і Y— два топологічних простора. Відображення $f : X \to Y$ називається* ***неперервним в точці*** *x_0, якщо для довільного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ існує такий окіл U точки x_0, що $f(U) \subset V$.*

Озн. 3.9. *Відображення $f : X \to Y$ називається* ***неперервним****, якщо воно є неперервним в кожній точці $x \in X$.*

Інакше кажучи, неперервне відображення зберігає граничні властивості: якщо точка $x \in X$ є близькою до деякої множини $A \subset X$, то точка $y = f(x) \in Y$ є близькою до образу множини *A*.

Теорема 3.2. *Для того щоб відображення $f : X \to Y$ було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз*

$f^{-1}(V)$ *будь-якої відкритої множини* $V \subset Y$ *був відкритою множиною в X.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення, а V — довільна відкрита множина в Y. Доведемо, що множина $U = f^{-1}(V)$ є відкритою в X. Для цього візьмемо довільну точку $x_0 \in U$ і позначимо $y_0 = f(x_0)$. Оскільки множина V є відкритим околом точки y_0 в просторі Y, а відображення f є неперервним в точці x_0, в просторі X існує відкритий окіл U_0 точки x_0, такий що $f(U_0) \subset V$. Звідси випливає, що $U_0 \subset U$ (властивість 5). Отже, множина U є відкритою в X.

$$f \in C(X,Y) \Rightarrow \exists U_0 \in \tau_X : x_0 \in U_0, f(U_0) \subset V \Rightarrow$$
$$f^{-1}(f(U_0)) \subset f^{-1}(V) = U \Rightarrow U_0 \subset f^{-1}(f(U_0)) \subset U \Rightarrow U \in \tau_X$$

Достатність. Нехай прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої в Y множини V є відкритим в X, а $x_0 \in X$ — довільна точка. Доведемо, що відображення f є неперервним в точці x_0. Дійсно, нехай $y_0 = f(x_0)$, а V — її довільний відкритий окіл. Тоді $U = f^{-1}(V)$ за умовою теореми є відкритим околом точки x_0, до того ж $f(U) \subset V$ (властивість 11). Отже, відображення f є неперервним в кожній точці $x_0 \in X$. Таким чином, f є неперервним в X.

$$V \in \tau_X, U \overset{def}{=} f^{-1}(V) \in \tau_X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V \Rightarrow f \in C(X,Y). \qquad \blacksquare$$

Теорема 3.3. *Для того щоб відображення* $f : X \to Y$ *було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз* $f^{-1}(V)$ *будь-якої замкненої множини* $V \subset Y$ *був замкненою множиною в X.*

Доведення випливає з того, що доповнення відкритих множин є замкненими, а прообрази множин, що взаємно доповнюють одна одну, самі взаємно доповнюють одна одну (властивість 9).

Теорема 3.4. *Для того щоб відображення* $f : X \to Y$ *було неперервним, необхідно і достатньо, щоб* $\forall A \subset X \;\; f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f\left(A\right)}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай відображення $f : X \to Y$ є неперервним, а $x_0 \in \overline{A}$. Покажемо, що $y_0 = f\left(x_0\right) \in \overline{f(A)}$. Справді, нехай V — довільний окіл точки y_0. Тоді внаслідок неперервності f існує окіл U, який містить точку x_0 такий, що $f\left(U\right) \subset V$. Оскільки $x_0 \in \overline{A}$, то в околі U повинна міститись точка $x' \in A$ (можливо, вона збігається з точкою x_0). Разом з тим, очевидно, що $y' = f\left(x'\right)$ належить одночасно множині $f\left(A\right)$ і околу V, тобто $y_0 \in \overline{f\left(A\right)}$.

$f \in C\left(X, Y\right) \Rightarrow \forall V \in \tau_Y : f\left(x_0\right) \in V \;\exists U \in \tau_X : x \in U,\, f\left(U\right) \subset V$

$x_0 \in \overline{A} \Rightarrow U \bigcap A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x' \in U \bigcap A \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(x'\right) \in f\left(U \cap A\right) \subset f\left(U\right) \cap f\left(A\right) \Rightarrow y_0 = f\left(x_0\right) \in \overline{f\left(A\right)}$.

Достатність. Нехай $\forall A \subset X \;\; f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f\left(A\right)}$ і B — довільна замкнена в Y множина. Покажемо, що множина $A = f^{-1}\left(B\right)$ є замкненою в X. Нехай x_0 — довільна точка із $\overline{A}$. Тоді $f\left(x_0\right) \in f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f\left(A\right)}$. Разом з тим

$A = f^{-1}(B) \Rightarrow f(A)=f(f^{-1}(B)) \subset B \Rightarrow \overline{f\left(A\right)} \subset \overline{B} = B$.

Тому $f\left(x_0\right)\in B$, отже, $x_0 \in A$. Таким чином, $\overline{A}\subset A$, тобто A— замкнена множина. Звідси випливає, що відображення f є неперервним. ■

Озн. 3.10. *Бієктивне відображення* $f: X \to Y$ *називається* ***гомеоморфним****, або* ***гомеоморфізмом****, якщо і само відображення* f *і обернене відображення* f^{-1} *є неперервними.*

Озн. 3.11. *Топологічні простор X і Y називаються* ***гомеоморфними****, або* ***топологічно еквівалентними****, якщо існує хоча б одне гомеоморфне відображення* $f: X \to Y$.

Цей факт записується так: $f: X \cong Y$.

Приклад 3.3. Тривіальний приклад гомеоморфізму — тотожнє перетворення.

Приклад 3.4. Відображення, що задається строго монотонними неперервними дійсними функціями дійсної змінної є гомеоморфізмами. Гомеоморфним образом довільного інтервалу є інтервал.

Озн. 3.12. *Неперервне відображення* $f: X \to Y$ *називається* ***відкритим****, якщо образ будь-якої відкритої множини простору X є відкритим в Y.*

Озн. 3.13. *Неперервне відображення* $f: X \to Y$ *називається* ***замкненим****, якщо образ будь-якої замкненої множини простору X є замкненим в Y.*

Поняття відкритого і замкненого відображення не є взаємовиключними.

Приклад 3.5. Тотожне відображення одночасно є і відкритим, і замкненим.

Приклад 3.6. Відображення *вкладення* (ін’єктивне відображення) $i: A \subset X \to X$ є відкритим, якщо підмножина *A* є відкритою, і замкненим, якщо підмножина

A є замкненою.

Теорема 3.5. *Відображення* $f : X \to Y$ *є замкненим тоді і лише тоді, коли* $\forall A \subset X \; f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Доведення. *Необхідність.* Оскільки замкнене відображення є неперервним (за означенням), то внаслідок теореми 3.4 $\forall A \subset X \; f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$. Разом з тим, очевидно, що $f(A) \subset f\left(\overline{A}\right)$ (властивість 1), тому внаслідок монотонності замикання $\overline{f(A)} \subset \overline{f\left(\overline{A}\right)}$. Оскільки відображення f є замкненим, то $\overline{f\left(\overline{A}\right)} = f\left(\overline{A}\right)$. Таким чином, $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$.

Достатність. Функція f є неперервною внаслідок теореми 3.4. З умови $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$ для замкненої множини $A \subset X$ отримуємо, що $f(A) = \overline{f(A)}$, тобто образ будь-якої замкненої множини є замкненим.■

Теорема 3.6. *Відкрите бієктивне відображення* $f : X \to Y$ *є* ***гомеоморфізмом***.

Доведення. Оскільки $f : X \to Y$ – бієктивне відображення, існує обернене відображення $f^{-1} : Y \to X$. Оскільки $\forall A \subset X \left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A)$ і, за умовою теореми, f – відкрите відображення, то прообрази відкритих підмножин із X є відкритими. З теореми 3.2 випливає, що відображення f^{-1} є неперервним. Оскільки бієктивне відкрите відображення завжди є неперервним, доходимо висновку, що f – гомеоморфізм. ■

Теорема 3.7. *Замкнене бієктивне відображення*

$f : X \to Y$ *є гомеоморфізмом.*

Доведення цілком аналогічне теоремі 3.6. ■

Теорема 3.8. *Гомеоморфне відображення* $f : X \cong Y$ *одночасно є і відкритим, і замкненим.*

Доведення. Нехай $f^{-1} : Y \to X$ – обернене відображення. Тоді $\forall A \subset X \ f(A) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(A)$. Оскільки відображення f є гомеоморфізмом, відображення f і f^{-1} є неперервними. Оскільки образ множини A при відображенні f є прообразом множини A при відображенні $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ і обидва ці відображення є неперервними, то відображення f є відкритим і замкненим одночасно, тобто відкриті множини переводить у відкриті, а замкнені – у замкнені. ■

Теорема 3.9. *Бієктивне відображення* $f : X \to Y$ *є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли воно зберігає операцію замикання, тобто* $\forall A \subset X \ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Необхідність випливає з теорем 3.5 і 3.8, а достатність — з теорем 3.5 і 3.7.

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 24–28).
2. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — с.57–68.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. — М.: Наука, 1981 (с. 89-91, Гл. II, § 5. Топологические пространства).