

2.1 Оператори замикання і взяття внутрішності

Система аксіом, наведена в означенні 1.1 належить радянському математику П.С.Александрову (1925). Проте першу систему аксіом, що визначає топологічну структуру, запропонував польський математик К.Куратовський (1922).

Озн. 2.1. Нехай X — довільна множина. Відображення $cl: 2^X \rightarrow 2^X$ називається **оператором замикання Куратовського на X** , якщо воно задовольняє наступні умови (**аксіоми Куратовського**):

К.1. $cl(M \cup N) = cl(M) \cup cl(N)$ (аддитивність);

К.2. $M \subset cl(M)$;

К.3. $cl(cl(M)) = cl(M)$ (ідемпотентність);

К.4. $cl(\emptyset) = \emptyset$.

Теорема 2.1. Якщо в деякій множині X введено топологію в розумінні Александрова, то відображення cl , що задовольняє умові $cl(M) = \bar{M}$ є оператором Куратовського на X .

Доведення. Неважно помітити, що аксіоми К1–К4 просто співпадають із властивостями замикання, доведеними в теоремі 1.1. ■

Теорема 2.2 (про завдання топології оператором Куратовського). Кожний оператор Куратовського cl на довільній множині X задає в X топологію $\tau = \{U \subset X : cl(X \setminus U) = X \setminus U\}$ в розумінні Александрова, до того ж замикання \bar{M} довільної підмножини M із X в цій топології τ збігається з $cl(M)$, тобто $cl(M) = \bar{M}$.

Доведення. Побудуємо сімейство

$$\sigma = \{M \subset X : M = X \setminus U, U \in \tau\},$$

що складається із всіх можливих доповнень множин із системи τ , тобто таких множин, для яких $cl(M) = M$. Інакше кажучи, система σ складається з нерухомих точок оператора замикання Куратовського. За принципом двоїстості де Моргана, для сімейства σ виконуються аксіоми замкненої топології

F1. $X, \emptyset \in \sigma$.

F2. $F_\alpha \in \sigma, \alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \sigma$, де A — довільна множина.

F3. $F_\alpha \in \sigma, \alpha = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \bigcup_{\alpha=1}^n G_\alpha \in \sigma$.

Отже, щоб перевірити аксіоми Александрова для сімейства множин τ , достатньо перевірити виконання аксіом F1–F3 для сімейства множин σ .

1) Перевіримо аксіому F1: $X \in \sigma? \emptyset \in \sigma?$

Аксіома K2 стверджує, що $M \subset cl(M)$. Покладемо $M = X$.
Отже, $X \subset cl(X) \subset X \Rightarrow cl(X) = X \Rightarrow X \in \sigma$.

Аксіома K4 стверджує, що $cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \sigma$.

2) Перевіримо виконання аксіоми F2.

Спочатку покажемо, що оператор cl є монотонним:

$$\forall A, B \in \sigma : A \subset B \Rightarrow cl(A) \subset cl(B).$$

Нехай $A, B \in \sigma$ і $A \subset B$. Тоді

$$cl(B) = cl(B \cup A) = cl(B) \cup cl(A) \text{ (аксіома K1),}$$

Отже,

$$cl(A) \subset cl(A) \cup cl(B) = cl(B \cup A) = cl(B).$$

Використаємо це допоміжне твердження для перевірки аксіоми F3. З одного боку,

$$\begin{aligned} \forall F_\alpha \in \sigma \quad \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset F_\alpha \quad \forall \alpha \in A &\Rightarrow \Rightarrow \\ \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) \subset \text{cl}(F_\alpha) = F_\alpha \quad \forall \alpha \in A &\Rightarrow \\ \Rightarrow \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha. \end{aligned}$$

З іншого боку, за аксіомою K2

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right).$$

Отже,

$$\text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \sigma.$$

3) Перевіримо виконання аксіоми F3.

$$A, B \in \sigma \Rightarrow \text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) = A \cup B \Rightarrow A \cup B \in \sigma.$$

Таким чином, σ — замкнена топологія, а сімейство τ , що складається із доповнень до множин із сімейства σ — відкрита топологія.

Залишилося показати, що в просторі (X, τ) , побудованому за допомогою оператора cl , замикання \bar{M} довільної множини M збігається з $\text{cl}(M)$:

$$\text{cl}(M) = \bar{M}.$$

Дійсно, за теоремою 1.2 множина M є замкненою, якщо $\bar{M} = M$. Із аксіом K2 і K3 випливає, що множина $\text{cl}(M)$ є замкненою і містить M . Покажемо, що ця множина — найменша замкнена множина, що містить множину M , тобто є її замиканням.

Нехай F — довільна замкнена в (X, τ) множина, що містить M :

$$M \subset F, \text{cl}(F) = F.$$

Внаслідок монотонності оператора cl отримуємо наступне.

$$M \subset F, \text{cl}(F) = F \Rightarrow \text{cl}(M) \subset \text{cl}(F) = F. \blacksquare$$

Озн. 2.2. Нехай X — довільна множина. Відображення $\text{Int}: 2^X \rightarrow 2^X$ називається **оператором взяття внутрішності множини X** , якщо воно задовольняє наступні умови:

K.1. $\text{Int}(M \cap N) = \text{Int}(M) \cap \text{Int}(N)$ (аддитивність);

K.2. $\text{Int}(M) \subset M$;

K.3. $\text{Int}(\text{Int}(M)) = \text{Int}(M)$ (ідемпотентність);

K.4. $\text{Int}(\emptyset) = \emptyset$.

Наслідок 2.1. Оскільки

$$\text{Int } A = X \setminus \overline{X \setminus A},$$

оператор взяття внутрішності є двоїстим для оператора замикання Куратовського. Отже, система множин $\tau = \{A \subseteq X : \text{Int } A = A\}$ утворює в X топологію, а множина $\text{Int } A$ в цій топології є внутрішністю множини A .

2.2 Бази

Для завдання в множині X певної топології немає потреби безпосередньо указувати всі відкриті підмножини цієї топології. Існує деяка сукупність відкритих підмножин, яка повністю визначає топологію. Така сукупність називається *базою* цієї топології.

Озн. 2.3. Сукупність β відкритих множин простору (X, τ) називається **базою топології τ** або **базою простору (X, τ)** , якщо довільна непорожня відкрита множина цього

простору є об'єднанням деякої сукупності множин, що належать β .

$$\forall G \in \tau, G \neq \emptyset \exists B_\alpha \in \beta, \alpha \in A : G = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha .$$

Зауваження 2.1. Будь-який простір (X, τ) має базу, оскільки система всіх відкритих підмножин цього простору утворює базу його топології.

Зауваження 2.2. Якщо в просторі (X, τ) існують ізольовані точки, вони повинні входити в склад будь-якої бази цього простору.

Теорема 2.3. Для того щоб сукупність β множин із топології τ була базою цієї топології, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки $x \in X$ і довільної відкритої множини U , що містить точку x , існувала множина $V \in \beta$, така щоб $x \in V \subset U$.

Доведення. Необхідність. Нехай β — база простору (X, τ) , $x_0 \in X$, а $U_0 \in \tau$, таке що $x_0 \in U_0$. Тоді за означенням бази $U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, де $V_\alpha \in \beta$. З цього випливає, що $x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0$.

$$\beta = \mathcal{B}(\tau), \quad x_0 \in X, \quad U_0 \in \tau, \quad x_0 \in U_0 \Rightarrow U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha, \quad V_\alpha \in \beta \Rightarrow$$

$$x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0$$

Достатність. Нехай для кожної точки $x \in X$ і довільної відкритої множини $U \in \tau$, що містить точку x , існує множина $V_x \in \beta$, така що $x \in V_x \subset U$. Легко перевірити, що $U = \bigcup_{x \in U} V_x$.

Дійсно, якщо точка $x \in U$, то за умовою теореми, вона належить множині $V_x \subset U$, а отже і об'єднанню таких множин $\bigcup_{x \in U} V_x$.

$$x \in U \Rightarrow \exists V_x \subset U: x \in V_x \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in U} V_x.$$

І навпаки, якщо точка належить об'єднанню $\bigcup_{x \in U} V_x$, то вона належить принаймні одній із цих множин $V_x \subset U$, а отже — вона належить множині U .

$$x \in \bigcup_{x \in U} V_x \Rightarrow \exists V_x \subset U: x \in V_x \Rightarrow x \in U.$$

Таким чином, довільну відкриту множину $U \in \tau$ можна подати у вигляді об'єднання множин із β . ■

Приклад 2.1. Оскільки $\forall x \in \mathbb{R}^1$ і $\forall (a, b) \exists x \exists (a_0, b_0) \subset (a, b)$, то за теоремою 2.3 сукупність всіх відкритих інтервалів утворює базу топології в \mathbb{R}^1 .

Приклад 2.2. Оскільки $\forall x \in \mathbb{R}^1$ і $\forall (a, b) \exists x \exists (r_1, r_2) \subset (a, b)$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, то за теоремою 2.3 сукупність всіх відкритих інтервалів із раціональними кінцями також утворює базу топології в \mathbb{R}^1 .

Із теореми 2.3 випливають два наслідки.

Властивість 2.1. Об'єднання всіх множин, які належать базі β топології τ , утворює всю множину X .

Доведення. Оскільки $X \in \tau$, то за означенням бази

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha, \text{ де } V_\alpha \in \beta. \blacksquare$$

Властивість 2.2. Для довільних двох множин U і V із бази β і для кожної точки $x \in U \cap V$ існує множина W із β така, що $x \in W \subset U \cap V$.

Доведення. Оскільки $U \cap V \in \tau$, то за теоремою 2.3 в множині $U \cap V$ міститься відкрита множина W із бази, така що $x \in W$. ■

Теорема 2.4 (про завдання топології за допомогою бази). Нехай в довільній множині X задана деяка сукупність відкритих множин β , що має властивості 2.1 і 2.2. Тоді в

множині X існує єдина топологія τ , однією з баз якої є сукупність β .

Доведення. Припустимо, що τ — сімейство, що містить лише порожню множину і всі підмножини множини X , кожна з яких є об'єднанням підмножин із сукупності β (властивість 2.1).

$$\tau = \left\{ \emptyset, G_\alpha \subset X, \alpha \in A : G_\alpha = \bigcup_{i \in I} B_i^\alpha, B_i^\alpha \in \beta \right\}.$$

Перевіримо, що це сімейство множин є топологією. Виконання аксіом топології 1 і 2 є очевидним: $\emptyset \in \tau, X \in \tau$ і $G_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$. Аксіома 3 є наслідком властивостей 2.1 і 2.2. Не обмежуючи загальності, можна перевірити її для випадку перетину двох множин.

Нехай $U, U' \in \tau$. За означенням, $U = \bigcup_{i \in I} V_i, U' = \bigcup_{j \in J} V'_j$,

$V_i, V'_j \in \beta$. Розглянемо перетин

$$U \cap U' = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} V'_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (V_i \cap V'_j).$$

Доведемо, що $V_i \cap V'_j \in \tau$. Нехай $x \in V_i \cap V'_j$. Тоді, за властивістю 2.2, існує множина $W_x \in \beta$, така що $x \in W_x \subset V_i \cap V'_j$. Оскільки точка $x \in V_i \cap V'_j$ є довільною, то $V_i \cap V'_j = \bigcup_{x \in V_i \cap V'_j} W_x \in \tau$. Отже, $U \cap U' \in \tau$.

Таким чином, сімейство τ дійсно утворює топологію на X , а система β є її базою. ■

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 14–22).
2. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986 (стр. 46–50).