15. Спряжений оператор

Означення 15.1. *Нехай* X, Y *— лінійні простори,* $T: X \to Y$ *— лінійний оператор. Алгебраїчно спряженим оператором до* T *називається оператор* $T': Y' \to X'$*, що діє за правилом* $T'f = f \circ T$.

Означення 15.2. *Нехай* (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) *— дуальні пари. Будемо говорити, що у оператора* T *існує* ***спряжений оператор*** $T^*: Y_2 \to Y_1$*, якщо для будь-якого* $y \in Y_2$ *існує такий елемент* $T^* y \in Y_1$*, що* $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ *для всіх* $x \in X_1$.

Трактуючи елементи простору Y_1, Y_2 як функціонали на X_1 і X_2 відповідно, бачимо, що $T^* y = y \circ T$. Очевидно, що спряжений оператор до T існує тоді і лише тоді, коли $T'(Y_2) \subset Y_1$. У цьому випадку T^* — це звуження алгебраїчно спряженого оператора T' на Y_2. Для дуальних пар (X_1, X_1^*), (X_2, X_2^*), де X_1, X_2 — банахові простори, то нове означення спряженого оператора збігається з відомим означенням спряженого до оператору в банахових просторах.

Теорема 15.1. *Нехай* X_1 і X_2 *— локально опуклі простори,* $T: X_1 \to X_2$ *— лінійний неперервний оператор. Тоді у* T *існує спряжений* $T^*: X_2^* \to X_1^*$.

Доведення. Нехай $f \in X_2^*$. Тоді функціонал

$T'f = f \circ T$ є неперервним як композиція двох неперервних відображень. Отже, $T'\left(X_2^*\right) \subset X_1^*$. □

Теорема 15.2. *Нехай* $\left(X_1, Y_1\right)$, $\left(X_2, Y_2\right)$ *— дуальні пари,* $T : X_1 \to X_2$ *— лінійний оператор,* $T^* : Y_2 \to Y_1$ *— спряжений оператор. Тоді для любого* $A \subset Y_2$

$$T^{-1}\left(A^0\right) = \left(T^* A\right)^0.$$

Доведення.

$$x \in T^{-1}\left(A^0\right) \Leftrightarrow Tx \in A^0 \Leftrightarrow \forall y \in A \left|\left\langle Tx, y\right\rangle\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in A \left|\left\langle x, T^* y\right\rangle\right| \leq 1 \Leftrightarrow \forall z \in T^* A \left|\left\langle x, z\right\rangle\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(T^* A\right)^0.$$ □

Теорема 15.3. *Нехай* $\left(X_1, Y_1\right)$, $\left(X_2, Y_2\right)$ *— дуальні пари,* $T : X_1 \to X_2$ *— лінійний оператор. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. *У оператора* T *існує спряжений.*
2. T *— слабко неперервний оператор, тобто він є неперервним як оператор, що діє з* $\left(X_1, \sigma\left(X_1, Y_1\right)\right)$ *і* $\left(X_2, \sigma\left(X_2, Y_2\right)\right)$.

Доведення.

$1 \Rightarrow 2$. Внаслідок лінійності достатньо перевірити неперервність оператору в нулі. За теоремою 13.2 базу околів нуля в топології $\sigma\left(X_2, Y_2\right)$ утворюють поляри скінчених множин $A \subset Y$. За формулою

$$T^{-1}\left(A^0\right)=\left(T^*A\right)^0$$

прообраз $T^{-1}\left(A^0\right)$ околу A^0 — це знову поляра $\left(T^*A\right)^0$ скінченої множини $T^*A\subset Y_1$. Отже, $T^{-1}\left(A^0\right)$ — це окіл нуля в топології $\sigma\left(X_1,Y_1\right)$. □

Наслідок 15.1. *Нехай* X_1, X_2 *— локально опуклі простори,* $T: X_1 \to X_2$ *— лінійний неперервний оператор. Тоді* T *— слабко неперервний оператор в топологіях* $\sigma\left(X_1,X_1^*\right)$ *і* $\sigma\left(X_2,X_2^*\right)$.

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006 (с. 535–538).