14. Біполяра

Означення 14.1. *Нехай* X — *лінійний простір.* ***Абсолютно опуклою комбінацією*** *набору елементів* $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset X$ *називається будь-яка сума виду* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, *де* $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \le 1$.

Означення 14.2. ***Абсолютно опуклою оболонкою*** *множини* A *в лінійному просторі* X *називається множина* $aconv\, A$.

Нехай (X,Y) — дуальна пара, $A \subset X$. Тоді $A^0 \subset Y$ і у цієї множини теж можна розглянути поляру.

Означення 14.3. *Множина* $\left(A^0\right)^0 \subset X$ *називається біполярою множини* $A \subset X$ *і позначається як* A^{00}.

Теорема 14.1. *Біполяра* A^{00} *множини* $A \subset X$ *збігається з* $\sigma(X,Y)$*-замиканням абсолютно опуклої оболонки множини* A.

Доведення. Зауважимо, що $A^{00} \supset A$. Дійсно, якщо $x \in A$, то за означенням множини A^0

$$\forall y \in A^0 \left|\langle x, y\rangle\right| \le 1.$$

Це означає, що $x \in A^0$.

Далі, біполяра — частковий приклад поляри. Отже, відповідно до пункту 6) теореми 13.2 A^{00} — опукла врівноважена $\sigma(X,Y)$-замкнена множина. Відповідно, $A^{00} \supset \overline{aconv}\, A$. Для доведення оберненого включання візьмемо довільну точку $x_0 \in X \setminus \overline{aconv\, A}$ і переконаємося, що $x \notin A^{00}$. Дійсно, оскільки $x_0 \in \overline{aconv\, A}$ і $\overline{aconv\, A}$ — це опукла врівноважена $\sigma(X,Y)$-замкнена множина, тому за теоремою Хана-Банаха (теорема 11.5) існує $\sigma(X,Y)$-неперервний лінійний функціонал y на X, що

1. $|y(x)| \le 1 \;\; \forall x \in \overline{aconv\, A}$
2. $|y(x_0)| > 1$

Будь-який $\sigma(X,Y)$-неперервний лінійний функціонал — це елемент простору Y. Умова 1 означає, що $y \in \left(\overline{aconv\, A}\right)^0 \subset A^0$. Тоді друга умова означає, що $x \notin A^{00}$. □

Наслідок 14.1. *Якщо* $A \subset X$ — $\sigma(X,Y)$*-замкнена врівноважена множина, то* $A^{00} = A$. *Зокрема,* $B^{000} = B^0 \;\; \forall B \subset Y$.

Наслідок 14.2. $A^{\perp\perp} = \overline{Lin}\, A \;\; \forall A \subset X$. *Якщо* A — *лінійний підпростір, то* $A^{\perp\perp} = \overline{A}$. *Нарешті,* $B^{\perp\perp\perp} = B^{\perp} \; \forall B \subset Y$.

Доведення.

$$A^{\perp\perp} = \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\left(Lin\, A\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(Lin\, A\right)^{00} = \overline{Lin}\, A. \; □$$

Наслідок 14.3. *Якщо* $A_1, A_2 \subset X$ — $\sigma(X,Y)$*-замкнені врівноважені множини, то* $A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1^0 = A_2^0$. *Якщо до* *того ж* A_1, A_2 *— підпростори, то* $A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1^{\perp} = A_2^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $A_1 = A_2 \Rightarrow A_1^0 = A_2^0$.

З іншого боку, якщо $A_1^0 = A_2^0$, то $A_1^{00} = A_2^{00}$ і можна застосувати теорему о біполярі. □

Теорема 14.2. *Нехай* (X, Y) *— дуальна пара і* $A \subset X$. *Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. Множина функціоналів $A \subset X$ *розділяє точки простору* X.

2. $A^{\perp} = \{0\}$

3. $A^{\perp\perp} = Y$

4. Лінійна оболонка множини A *є* $\sigma(Y, X)$*-щільною в* Y.

Доведення.

$1 \Rightarrow 2$. Включення $A^{\perp} \supset \{0\}$ виконано завжди. Якщо ж $x \in X \setminus \{0\}$, то за умовою 1 існує $y \in A$, такий що $\langle x, y \rangle \neq 0$. У цьому випадку $x \notin A^{\perp}$.

$2 \Rightarrow 1$. Нехай $x \in X \setminus \{0\}$. Тоді $x \notin A^{\perp}$, отже 1 існує $y \in A$, такий що $\langle x, y \rangle \neq 0$.

$2 \Leftrightarrow 3$. Оскільки $A^{\perp}$ і $\{0\}$ — це $\sigma(X, Y)$-замкнені підпростори, можна скористатися наслідком 11.3.

$3 \Leftrightarrow 4$. За наслідком 11.2 $A^{\perp\perp} = \overline{Lin}\, A$. □

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006 (с. 533–535).