13. Двоїстість

Означення 13.1. *Нехай* X, Y *— лінійні простори. Відображення, що ставить кожній парі елементів* $(x, y) \in X \times Y$ *комплексне число* $\langle x, y \rangle$, *називається* ***двоїстістю***, *якщо*

1) $\langle x, y \rangle$ *— білінійна форма, тобто*

$\langle a_1 x_1 + a_2 x_2, y \rangle = a_1 \langle x_1, y \rangle + a_2 \langle x_2, y \rangle$,

$\langle x, a_1 y_1 + a_2 y_2 \rangle = a_1 \langle x, y_1 \rangle + a_2 \langle x, y_2 \rangle$.

2) $\langle x, y \rangle$ *задовольняє умови невиродженості:*

а) $\forall x \in X \setminus \{0\} \, \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \neq 0$,

б) $\forall y \in Y \setminus \{0\} \, \exists x \in X : \langle x, y \rangle \neq 0$.

Означення 13.2. *Пара просторів* X, Y *із заданою на них двоїстістю називаються* ***дуальною парою***, *а парою просторів у двоїстості.*

Означення 13.3. *Нехай* X, Y *— пара просторів у двоїстості. По кожному* $y \in Y$ *визначимо функціонал на* X *за правилом* $y(x) = \langle x, y \rangle$, *тобто* $Y \subset X'$. ***Слабкою топологією*** *на* X *називатимемо топологію* $\sigma(X, Y)$, *тобто базу околів нуля топології* $\sigma(X, Y)$ *задає сімейство множин* $\left\{ x \in X : \max\limits_{y \in G} \left| \langle x, y \rangle \right| < \varepsilon \right\}$, *де* $\varepsilon > 0$, *а* G *пробігає всі скінчені підмножини простору* Y.

Зауваження 13.1. *Аксіома 2) дуальної пари гарантує віддільність слабкої топології. За теоремою 12.1* $\left(X, \sigma(X, E)\right)^{*} = Y$, *тобто будь-яку дуальну пару можна вважати парою виду* $\left(X, X^{*}\right)$.

Зауваження 13.2. *Особливістю загального визначення дуальної пари є рівноправність просторів* X *і* Y. *Елементи* x *також можна вважати функціоналами на* Y *і розглядати слабку топологію* $\sigma(Y, X)$ *на просторі* Y.

Зауваження 13.3. *Топологія* $\sigma(Y, X)$ *— це найслабкіша топологія, в якій усі функціонали* $y(x) = \langle x, y\rangle$ *є неперервними. Зокрема, якщо* X *— локально опуклий простір, а* $Y = X^{*}$, *то* $\sigma(X, Y)$ *слабкіше вихідної топології, тому вона називається слабкою.*

Теорема 13.1. *Кожна опукла замкнена множина локально опуклого простору* X *є замкненою і в слабкій топології* $\sigma\left(X, X^{*}\right)$. *Зокрема, кожний замкнений підпростір локально опуклого підпростору* X *є* $\sigma\left(X, X^{*}\right)$*-замкненим.*

Без доведення.

Означення 13.4. *Нехай* X, Y *— пара просторів у двоїстості..* ***Полярою*** *множини* $A \subset X$ *називається множина* $A^{0} \subset Y$, *що визначається за правилом:* $y \in A^{0}$, *якщо* $\left|\langle x, y\rangle\right| \leq 1$ *для всіх* $x \in A$. *Симетричним чином визначається поляра* $A^{0} \subset X$ *множини* $A \subset Y$.

Означення 13.5. *Аннулятором множини* $A \subset X$ *називається множина* $A^{\perp} \subset Y$*, що складається з тих* $y \in Y$*, якщо* $\langle x, y \rangle = 0$ *для всіх* $x \in A$*. Очевидно,* $A^{\perp} \subset A^0$ *і згідно леми 12.2, якщо* A *— лінійний підпростір, то* $A^{\perp} \subset A$*. Крім того,* $A^{\perp} = (Lin\ A)^{\perp}$.

Приклад 13.1. Розглянемо пару (X, X^*), де X — банахів простір. Тоді $(B_X)^0 = B^0_{X^*}$. Дійсно,

$$f \in \overline{B}_{X^*} \Leftrightarrow \|f\| \le 1 \Leftrightarrow \sup_{x \in B_X} |f(x)| \le 1 \Leftrightarrow f \in (B_X)^0.$$

Теорема 13.1. *Поляри мають такі властивості:*

1) якщо $A \subset B$, то $A^0 \supset B^0$;
2) $\{O_X\}^0 = Y$, $X^0 = \{O_Y\}$, де O_X і O_Y — нульові елементи просторів X і Y відповідно;
3) $(\lambda A)^0 = \dfrac{1}{\lambda} A^0$ при $\lambda \neq 0$;
4) $\left(\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A \right) = \bigcap_{A \in \mathfrak{C}} A^0$ для будь-якого сімейства $A \in \mathfrak{C}$ підмножин простору X. Зокрема, $(A_1 \cup A_2)^0 = A_1^0 \cap A_2^0$;
5) для будь-якої точки $x \in X$ множина $\{x\}^0$ — це опуклий, врівноважений $\sigma(X, Y)$-замкнений окіл нуля;
6) поляра будь-якої множини — це опукла врівноважена $\sigma(Y, X)$-замкнена множина;

7) множини виду A^0, де A пробігає усі скінчені підмножини простору X, утворюють базу околів нуля в топології $\sigma(Y, X)$.

Доведення. Властивості 1–4 є очевидними. Опуклість і врівноваженість множини

$$\begin{aligned} \{x\}^0 &= \{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \le 1\} = \\ &= \{y \in Y : |x(y)| \le 1\} = x^{-1}\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\} \end{aligned} \qquad (1)$$

випливають з лінійності x як функціонала на Y. Оскільки $C_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$ — це замкнений окіл нуля в $\mathbb{C}$, а функціонал x є неперервним в топології $\sigma(Y, X)$, формула (1) означає, що $\{x\}^0$ — це $\sigma(Y, X)$-замкнений окіл нуля. Із цього випливає властивість 5). Властивість 6) випливає з 5) внаслідок властивості 4): $A^0 = \bigcap_{x \in A} \{x\}^0$, а операція перетину не порушує опуклості, замкненості і врівноваженості.

Для доведення властивості 7) зауважимо таке: якщо підмножина $A \subset X$ є скінченою, то $A^0 = \bigcap_{x \in A} \{x\}^0$ — це скінчений перетин $\sigma(Y, X)$-околів. Отже, поляра скінченої множини — це слабкий окіл. Далі, за означенням, будь-який $\sigma(Y, X)$-окіл містить множину виду $U_{G,\varepsilon} = \left\{y \in Y : \max_{g \in G} |g(x)| < \varepsilon\right\}$, $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset X$ і

$\varepsilon > 0$. Для $A = \frac{1}{2\varepsilon} G$ маємо $U_{G,\varepsilon} \supset A^0$. Отже, будь-який $\sigma(Y, X)$-окіл містить множину виду A^0, де $A \subset X$ є скінченою множиною.

Наслідок 13.1. Аннулятор будь-якої множини $A \subset X$ — це $\sigma(Y, X)$-замкнений лінійний підпростір.

Доведення. Лінійність перевіряється безпосередньо, а $\sigma(Y, X)$-замкненість випливає з властивості 6) і формули $A^{\perp} = (Lin\ A)^{\perp} = (Lin\ A)^0$.

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006 (с. 558–531).