12. Слабка топологія

Означення 12.1. *Нехай* X *— лінійний простір,* X' *— алгебраїчно спряжений до нього простір (тобто простір усіх лінійних функціоналів, заданих на* X *),* $E \subset X'$ *— деяка підмножина.* ***Слабкою топологією*** *на* X*, породженою множиною функціоналів* E*, називається найслабкіша топологія, в якій функціонали з* E *є неперервними.*

Зауваження 12.1. *Ця топологія є частковим випадком топології, породженою сімейством відображень, тому для неї використовується те ж позначення* $\sigma(X,E)$.

Для будь-якого скінченого набору функціоналів $G=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ і будь-якого $\varepsilon>0$ уведемо позначення

$$U_{G,\varepsilon}=\bigcap_{g\in G}\left\{x\in X:\left|g(x)\right|<\varepsilon\right\}=\left\{x\in X:\max_{g\in G}\left|g(x)\right|<\varepsilon\right\}.$$

Сімейство множин виду $U_{G,\varepsilon}$, де $G=(g_1,g_2,\ldots,g_n)\subset E$ і $\varepsilon>0$, утворює базу околів нуля топології $\sigma(X,E)$. Базу околів будь-якого елемента $x_0\in X$ утворюють множини виду

$$\bigcap_{g\in G}\left\{x\in X:\left|g(x-x_0)\right|<\varepsilon\right\}=x_0+U_{G,\varepsilon}.$$

Звідси випливає, що топологія $\sigma(X,E)$ — це локально-опукла топологія, що породжена сімейством напівнорм $p_G(x)=\max_{g\in G}\left|g(x)\right|$, де G пробігає усі скінчені підмножини множини E. Для того щоб ця топологія була віддільною, необхідно і достатньо, щоб сімейство функціоналів E розділяло точки простору X.

Як зазначалося в попередніх лекціях, фільтр $\mathfrak{F}$ на X збігається в топології $\sigma(X,E)$ до елемента x тоді і лише тоді, коли $\lim\limits_{\mathfrak{F}} = f(x)$ для всіх $f \in E$. Зокрема, цей критерій збіжності є слушним і для послідовностей: $x_n \to x$ в топології $\sigma(X,E)$, якщо $f(x_n) \to f(x)$ для всіх $f \in E$.

Лема 12.1. *Нехай $f, \{f_k\}_{k=1}^{n}$ — лінійні функціонали на X і $Ker\ f \supset \bigcap\limits_{k=1}^{n} Ker\ f_k$. Тоді $f \in Lin\{f_k\}_{k=1}^{n}$.*

Доведення. Застосуємо індукцію по n, поклавши як базу $n = 1$.

Якщо $f_1 = 0$, то $Ker\ f \supset Ker\ f_1 = X$, тобто $f = 0$.

Якщо $f_1 \neq 0$, то $Y = Ker\ f_1$ — це гіперплощина в X. Отже, існує вектор $e \in X \setminus Y$, такий що $Lin\{e, Y\} = X$. Позначимо $a = f(e)$ і $b = f_1(e)$. Функціонал $f - \frac{a}{b} f_1$ дорівнює нулю як на Y, так і точці e. Отже, функціонал $f - \frac{a}{b} f_1$ дорівнює нулю на всьому просторі $X = Lin\{e, Y\}$, тобто $f \in Lin\{f_1\}$.

Індукційний перехід $n \to n + 1$. Розглянемо підпростір $Y = \bigcap\limits_{k=1}^{n} Ker\ f_k$. Умова $Ker\ f \supset \bigcap\limits_{k=1}^{n+1} Ker\ f_k$ означає, що ядро звуження функціонала f на Y містить ядро звуження функціонала f_{n+1} на Y. Отже (випадок $n = 1$), існує такий скаляр α, що $f - \alpha f_{n+1}$ дорівнює нулю на всьому $Y = \bigcap_{k=1}^{n} Ker\, f_k$. Отже,

$$Ker\left(f - \alpha f_{n+1}\right) \supset \bigcap_{k=1}^{n} Ker\, f_k .$$

За припущенням індукції,

$$f - \alpha f_{n+1} \in Lin\left\{f_k\right\}_{k=1}^{n}, \text{ тобто } f \in Lin\left\{f_k\right\}_{k=1}^{n+1}.$$

Лема 12.2. *Нехай Y — підпростір лінійного простору X, $f \in X'$ і існує таке $a > 0$, що $\left|f\left(y\right)\right| \le a$ на всьому підпросторі Y. Тоді $f\left(y\right) = 0$ для всіх $y \in Y$.*

Доведення. Нехай існує $y_0 \in Y$ такий що $f\left(y_0\right) \neq 0$. Тоді на елементі $y = \frac{2a}{f\left(y_0\right)} y_0 \in Y$ маємо

$$\left|f\left(y\right)\right| = 2a > a .$$

Теорема 12.1. *Функціонал $f \in X'$ є неперервним в топології $\sigma\left(X, E\right)$ тоді і лише тоді, коли $f \in Lin\, E$. Зокрема, якщо $E \subset X'$ — лінійний підпростір, множина $\left(X, \sigma\left(X, E\right)\right)^*$ усіх функціоналів, неперервних в топології $\sigma\left(X, E\right)$ на X, збігається з E.*

Доведення. Необхідність. За означенням топології $\sigma\left(X, E\right)$ усі елементи множини E є функціоналами, неперервними в топології $\sigma(X,E)$. Отже, неперервними будуть і їх лінійні комбінації.

Достатність. Нехай функціонал $f \in X'$ є неперервним в $\sigma(X,E)$. Тоді існує скінчена множина функціоналів $G=\{g_1,g_2,...,g_n\}\subset E$ і таке $\varepsilon>0$, що в околі

$$U_{G,\varepsilon}=\left\{x\in X:\max_{g\in G}\left|g(x)\right|<\varepsilon\right\}$$

усі значення функціонала f є обмеженими за модулем деяким числом $a>0$. Цим же число будуть обмежені значення функціонала на підпросторі

$$Y=\bigcap_{k=1}^{n} Ker\ g_k \subset U_{G,\varepsilon}.$$

За лемою 12.2 функціонал f обертається на нуль на просторі Y, що за лемою 12.1 значить, що $f\in Lin\{g_k\}_{k=1}^{n}\subset Lin\ E$.

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006 (с.516–518).