11. Напівнорми і топології

Нехай X — топологічний векторний простір.

Означення 11.1. *Топологічний векторний простір X називається* ***локально опуклим****, якщо для будь-якого околу нуля U існує опуклий окіл нуля V, що міститься в U. Інакше кажучи, топологічний векторний простір X є локально опуклим, якщо система околів нуля $\Re_0$ містить базу, що складається з опуклих множин.*

Означення 11.2. *Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ — довільний скінчений набір елементів лінійного простору X. Елемент виду $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ називається опуклою комбінацією елементів x_k, якщо $\lambda_k > 0$ $\forall k = 1,...,n$ і $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.*

Означення 11.3. *Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ — довільний скінчений набір елементів лінійного простору X. Елемент виду $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ називається* ***опуклою комбінацією*** *елементів x_k, якщо $\lambda_k > 0$ $\forall k = 1,...,n$ і $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.*

Означення 11.4. *Нехай A — довільна підмножина лінійного простору X. Множина усіх опуклих комбінацій елементів з A називається опуклою оболонкою множини A і позначається як $conv(A)$.*

Означення 11.5. Підмножина $A \subset X$ називається *урівноваженою*, якщо для будь-якого скаляра $\lambda : |\lambda| \leq 1$ виконане включення $\lambda A \subset A$.

Теорема 11.1. *Кожний опуклий окіл нуля U містить опуклий врівноважений відкритий окіл нуля V.*

Доведення. За теоремою 8.3 у кожному відкритому околі нуля U міститься відкритий врівноважений окіл нуля V.

1) Покажемо, що $conv(V) \subset U$.

Опуклість цієї множини є очевидною (за означенням опуклої оболонки).

2). Покажемо, що $conv(V) \in \mathfrak{R}_0$.

$V \in \mathfrak{R}_0, V \subset conv(V) \Rightarrow conv(V) \in \mathfrak{R}_0.$

3). Покажемо, що $conv(V)$ є врівноваженим околом.

Нехай $|\lambda| \leq 1$.

V — врівноважений окіл нуля $\Rightarrow \lambda V \subset V \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda conv(V) = conv(\lambda V) \subset conv(V)$.

4). Покажемо, що $conv(V)$ є відкритою множиною.

$V \in \tau$, операції множення на скаляр і суми множин замкнені відносно відкритих множин $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k V$, де $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k > 0$ і $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ є відкритими

$$\Rightarrow conv(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k V \in \tau.$$

Означення 11.6. *Функція* $p : X \to \mathbb{R}$ *називається* ***напівнормою****, якщо*

1) $p(x) \geq 0$,
2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \ \ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$,
3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \ \forall x, y \in X$.

Зауваження 11.1. *Напівнорма відрізняється від норми тим, що вона напівнорма маже дорівнювати нулю на деяких ненульових елементах* $x \in X$.

Означення 11.7. ***Одиничною кулею напівнорми*** p *називається множина* $B_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Зауваження 11.2. *Множина* B_p *опуклою врівноваженою множиною.*

Означення 11.8. ***Функціоналом Мінковського*** *опуклої поглинаючої множини в лінійному просторі* X *називається дійсна функція, задана на* X *формулою*

$$\varphi_A(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t} x \in A\right\}.$$

Зауваження 11.3. *Функціонал* φ_A *пов'язаний з множиною* A *такими співвідношеннями:*

1) $x \in A \Rightarrow \varphi_A(x) \leq 1;$
2) $\varphi_A(x) < 1 \Rightarrow x \in A.$

Якщо A *— опукла поглинаюча множина в лінійному просторі* X, *то* φ_A *— опуклий функціонал, що набуває невід'ємні значення.*

Теорема 11.2. *Напівнорма* p *на топологічному векторному просторі* X *є неперервною тоді і лише тоді, коли* B_p *— окіл нуля.*

Доведення. Необхідність. $B_p = p^{-1}(-1,1)$ — прообраз відкритої множини. Якщо p — неперервна функція, то прообраз відкритої множини є відкритим.

Достатність. Нехай B_p — окіл нуля. Доведено неперервність напівнорми. Для будь-якого $x \in X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ треба знайти такий окіл U точки x, що

$$p(U) \subset (p(x) - \varepsilon, p(x) + \varepsilon).$$

Таким околом є $U = x + \varepsilon B_p$. Дійсно,

$$\forall y \in U \;\; y = x + \varepsilon z, \;\; p(z) < 1.$$

Отже, за нерівністю трикутника

$$p(x) - \varepsilon < p(y) < p(x) + \varepsilon.$$

Означення 11.9. *Нехай* G *— сімейство напівнорм на лінійному просторі* X. *Позначимо через* $\mathfrak{D}_G$ *систему усіх скінчених перетинів множин виду* rB_p, *де* $p \in G$ *і* $r > 0$. ***Лінійно-опуклою топологією, породженою сімейством напівнорм*** $\mathfrak{D}_G$, *називається топологія* τ_G *на* X, *а базою околів точки* $x \in X$ *є сімейство множин виду* $x + U$, *де* $U \in \mathfrak{D}_G$.

Означення 11.10. *Сімейство напівнорм* G *називається невиродженим, якщо для будь-якого* $x \in X \setminus \{0\}$ *існує* $p \in G$ *з* $p(x) \neq 0$.

Теорема 11.3. *Нехай* G *— сімейство напівнорм на лінійному просторі* X. *Тоді мають місце такі твердження:*

1) *топологія* τ_G, *породжена сімейством* G, *узгоджується з лінійною структурою і є локально опуклою;*

2) *топологія* τ_G *є віддільною тоді і лише тоді, коли сімейство напівнорм* G *є невиродженим;*

3) *топологічний векторний простір* X *є локально опуклим тоді і лише тоді, коли його топологія породжується деяким сімейством напівнорм.*

Теорема 11.4. *Нехай* X *— топологічний векторний простір, а* f *— лінійний функціонал на* X. *Для неперервності функціонала* f *необхідно і достатньо, щоб існувала така неперервна напівнорма* p *на* X, *що* $\left|f(x)\right| \le p(x) \ \forall x \in X$.

Доведення. Необхідність. Нехай f — неперервний. Тоді шукана напівнорма задається формулою $p(x) = \left|f(x)\right|$.

Достатність. Нехай $\left|f(x)\right| \le p(x) \ \forall x \in X$ *і* p *— неперервна напівнорма. Тоді функціонал* f *є обмеженим в околі нуля* B_p.

Теорема 11.5 (теорема Хана-Банаха в локально опуклих просторах). *Нехай* f *— лінійний непепервний функціонал, заданий на підпросторі* Y *локально опуклого простору* X *. Тоді функціонал* f *можна продовжити на весь простір* X *із збереженням його лінійності і неперервності.*

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006 (с.512–515).