10. Лінійні оператори і функціонали

Нехай X і E —топологічні векторні простори.

Теорема 10.1. *Лінійний оператор* $T : X \to E$ *є неперервним тоді і лише тоді, коли він є неперервним в точці* $x = 0$.

Доведення. Необхідність. Неперервний оператор є неперервним у будь-якій точці простору, зокрема у нулі.

Достатність. Припустимо, що оператор T є неперервним в нулі. Доведемо, що він є неперервним у довільній точці $x_0 \in X$. Нехай V — довільний окіл точки Tx_0 в E. Тоді $V - Tx_0$ — окіл нуля в E. За умовою теореми, $T^{-1}(V - Tx_0)$ — окіл нуля в X. Оскільки оператор T є лінійним, маємо

$$T^{-1}(V) = T^{-1}(V - Tx_0) + x_0,$$

отже, $T^{-1}(V)$ — окіл точки x_0. □

Означення 10.1. *Лінійний оператор* $T : X \to E$ *називається* ***обмеженим****, якщо образ будь-якої обмеженої множини під дією* T *в* X *є обмеженою множиною в* E.

Теорема 10.1. *Кожний неперервний лінійний оператор* $T : X \to E$ *є обмеженим.*

Доведення. Нехай A — обмежена множина в X. Доведемо обмеженість множини $T(A)$. Нехай V — довільний окіл нуля в E *і* U — такий окіл нуля в X, що $T(U) \subset V$. Оскільки A — обмежена множина, то існує таке число $N > 0$, що $A \subset tU \quad \forall t > N$. Тоді

$$T(A) \subset tT(U) \subset tV \text{ при } \forall t > N. \ \square$$

Теорема 10.3. *Нехай оператор* $T : X \to E$ *переводить деякий окіл* U *простору* X *в обмежену множину. Тоді оператор* T *є неперервним.*

Доведення. Нехай $T(U)$ — обмежена множина. Для довільного околу V нуля в E існує число $t > 0$, що $T(U) \subset tU$. Тоді $\frac{1}{t}U \subset T^{-1}(V)$, тобто $T^{-1}(V)$ є околом нуля в X. □

Теорема 10.4. *Для ненульового лінійного функціонала* f, *заданого на топологічному просторі* X, *наступні умови є еквівалентними.*

1. *Функціонал* f *є неперервним.*
2. *Ядро функціонала* f *є замкненим.*
3. *Ядро функціонала* f *не є щільним в* X.
4. *Існує окіл нуля* U : $f(U)$ *— обмежена множина.*

Доведення.

$1 \Rightarrow 2$. $Ker\ f = f^{-1}(0)$. Оскільки $\{0\}$ — замкнена множина, а f — неперервний функціонал, то, оскільки прообраз замкненої множини під дією неперервного функціонала є замкненим, $Ker\ f$ є замкненою множиною.

$2 \Rightarrow 3$. (Від супротивного.) Якщо ядро функціонала є замкненим і щільним в X, то $Ker\ f = X$, тобто $f \equiv 0$, але за умовою теореми f — ненульовий функціонал.

$3 \Rightarrow 4$. Нехай ядро не є щільним. Тоді існує точка $x \in X$ і врівноважений окіл нуля U, такі що $(U + x) \bigcap Ker\ f = \varnothing$. Це значить, функціонал f в жодній точці $y \in U$ не може набувати значення $-f(x)$. Отже, $f(U)$ — врівноважена множина чисел, що відрізняється від числової прямої (точніше, відрізок, симетричний відносно нуля).

$4 \Rightarrow 1$. Випливає з теореми 10.3. □

Позначимо через X^* множину усіх неперервних лінійних функціоналів на X.

Означення 10.2. *Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис банахова простору X і $x \in X$. Коефіцієнти розкладу $f_n(x)$ елемента x по базису $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ називаються* ***координатними функціоналами****, що визначені на просторі X: $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x) x_k$.*

Теорема 10.5. *Нехай X — хаусдорфовий топологічний векторний простір X, такий що $\dim X = n$. Тоді:*

1. *Будь-який лінійний функціонал X є неперервним.*
2. *Для будь-якого топологічного векторного простору E будь-який лінійний оператор $T : X \to E$ є неперервним.*
3. *Простір X є ізоморфним n-вимірному гільбертовому простору l_2^n.*
4. *Простір X є повним.*

Доведення. Зазначимо, що при фіксованому *n* мають місце імплікації $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$.

$1 \Rightarrow 2$. Обираючи в X базис $\{x_k\}_{k=1}^n$ з координатними функціоналами $\{f_k\}_{k=1}^n$, оператор T можна подати у вигляді

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)Tx_k.$$

Отже, обчислення $T(x)$ зводиться до обчислення скалярів $f_k(x)$, де f — неперервний функціонал, множенню їх на фіксовані вектори Tx_k і додаванню добутків. В результаті отримуємо неперервний оператор T.

$2 \Rightarrow 3$. Оскільки простори X і l_2^n мають розмірність n, існує лінійна бієкція $T : X \to l_2^n$. За умовою 2 оператори T і T^{-1} є неперервними, отже, існує ізоморфізм $T : X \to l_2^n$.

$3 \Rightarrow 4$. Випливає з повноти простору l_2^n.

$4 \Rightarrow 1$. Скористаємось математичною індукцією по n. При $n = 0$ простір X містить лише нульовий елемент, тому твердження є тривіальним. Нехай $\dim X = n+1$ і f — ненульовий функціонал на X. Тоді $\dim Ker\, f = n$. За імплікаціями $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ отримуємо, що $Ker\, f$ — повний простір. Отже, $Ker\, f$ є замкнений в X і за теоремою 4 функціонал f є неперервним. □

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006. (с.507–510).