9. Повнота, передкомпактність, компактність

Означення 9.1. Фільтр $\mathfrak{F}$ у топологічному векторному просторі X називається *фільтром Коші*, якщо для будь-якого околу нуля U існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $A - A \subset U$. Такий елемент A називається *малим порядку* U.

Теорема 9.1. *Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ має границю, то $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші.*

Доведення. Нехай $\lim \mathfrak{F} = x$ і $U \in \mathfrak{R}_0$. Виберемо $V \in \mathfrak{R}_0$ з $V - V \subset U$. За теоремою 1.1 (п.1) існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $A \subset x + V$. Отже,

$$A - A \subset (x+V) - (x+V) \subset V - V \subset V.$$

Теорема 9.2. *Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші на топологічному векторному просторі X і x — гранична точка фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді* $\lim \mathfrak{F} = x$.

Доведення. Нехай $x + U$ — довільний окіл точки x, де $U \in \mathfrak{R}_0$. Виберемо окіл $V \in \mathfrak{R}_0$ з $V + V \subset U$ і множина $A \in \mathfrak{F}$, мала порядку V: $A - A \subset V$. За означенням граничної точки, множини A і $x + V$ перетинаються, то існує $y \in A \bigcap (x+V)$. Тоді

$$x + U \supset x + V + V \supset y + V \supset y + A - A \supset y + A - y = A.$$

Таким чином, окіл $x+U$ містить елемент фільтра $\mathfrak{F}$, отже, $x+U \in \mathfrak{F}$.

Означення 9.2. Множина A у топологічному векторному просторі X називається *повною*, якщо будь-який фільтр Коші на X, що містить A як елемент, має границю, що належить A. Зокрема, топологічний векторний простір X називається повним, якщо будь-який фільтр Коші в X має границю.

Теорема 9.3. *Нехай X — підпростір топологічного векторного простору E і $A \subset X$ — повна в X підмножина.*

Тоді A є повним як підмножина простору E.

Доведення. Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші на *E*, що містить *A* як елемент. Тоді, зокрема $X \in \mathfrak{F}$, то слід $\mathfrak{F}_X$ фільтра $\mathfrak{F}$ на *X* є фільтром. Легко бачити, що $\mathfrak{F}_X$ — це фільтр Коші на *X*, що містить *A* як елемент. Отже, через повноту *A* у *X* фільтр $\mathfrak{F}_X$ має в *X* границю $a \in A$. Ця ж точка *a* буде границею фільтра $\mathfrak{F}$ в *E*.

Теорема 9.4. *Повна підмножина A хаусдорфового топологічного векторного простору X є замкнутою. Зокрема, якщо підпростір хаусдорфова топологічного векторного простору є повним в індукованій топології, то цей підпростір є замкнутим.*

Доведення. Нехай точка $x \in X$ належить замиканню множини *A*. Нам потрібно довести, що $x \in A$. Розглянемо сімейство $\mathfrak{D}$ усіх перетинів виду $(x+U) \bigcap A$, де $U \in \mathfrak{R}_0$. Усі такі перетини не порожні, і $\mathfrak{D}$ задовольняє усі аксіоми бази фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}$, породжений базою $\mathfrak{D}$, мажорує фільтр $\mathfrak{R}_x$ усіх околів точки *x*, отже, $x = \lim \mathfrak{F}$. Зокрема, $\mathfrak{F}$ — це фільтр Коші. За побудовою, наша повна множина *A* є елементом фільтра $\mathfrak{F}$; отже, відповідно до означення 9.2, у фільтра $\mathfrak{F}$ має границю в *A*. Через единість границі $x \in A$, що і було потрібно довести.

Означення 9.3. Множина *A* у топологічному векторному просторі *X* називається *передкомпактом*, якщо для будь-якого околу нуля *U* існує така скінченна множина $B \subset X$, що $A \subset U+B$. Така множина *B* називається, за аналогією з ε-мережею, *U-мережею* множини *A*.

Теорема 9.5. *Щоб підмножина A хаусдорфового топологічного векторного простору X була компактом, необхідно і достатньо, щоб A була одночасно передкомпактом і повною множиною в X.*

Означення 9.4. Нехай X — топологічний векторний простір. Будемо говорити, що окіл нуля $U \in \mathfrak{R}_0$ *поглинає* множину $A \subset X$, якщо існує таке число $t > 0$, що $A \subset tU$ для будь-якого $t \geq N$.

Означення 9.5. Множина $A \subset X$ називається *обмеженою*, якщо вона поглинається кожним околом нуля.

Теорема 9.6. Система обмежених підмножин топологічного векторного простору X має такі властивості.

1. Нехай $A \subset X$ — обмежена множина. Тоді для будь-якого околу $U \in \mathfrak{R}_0$ існує таке число $N > 0$, що $A \subset tU$ для будь-якого $t \geq N$.
2. Об'єднання скінченної кількості обмежених множин є обмеженою множиною.
3. Будь-яка скінченна множина є обмеженою.
4. Будь-який передкомпакт у X є обмеженим.

Доведення.

1). Нехай $V \in \Omega_0$ — врівноважений окіл, що міститься в U за теоремою 8.2 (п.2). Виберемо таке число $N > 0$, що $A \subset NV$. Тоді для будь-якого $t \geq N$ маємо

$$A \subset NV = t\left(\frac{N}{t}V\right) \subset tV \subset tU.$$

2). Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — обмежені множини, U — окіл нуля. За пунктом 1)

$$\forall A_k \ \exists N_k : A_k \subset tU \ \forall t > N_k.$$

Покладемо $N = \max_{1 \le k \le n} N_k$. Тоді $\forall t \ge N$ усі включення $A_k \subset tU$ виконуються одночасно, тобто $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset tU$.

3). Одноточкова множина є обмеженою, оскільки окіл нуля є поглинаючою множиною. Отже, за пунктом 2) будь-яка скінченна множина як скінченне об'єднання одноточкових множин є обмеженою.

4). Нехай A — передкомпакт в X, U — окіл нуля. Виберемо врівноважений окіл $V \in \Omega_0$, такий що $V + V \subset U$. За означенням передкомпакта, існую така скінченна множина $B \subset X$, що $A \subset B + V$. Відповідно до пункту 3) можна знайти такий коефіцієнт $N > 0$, що $B \subset NV$. Тоді $A \subset B + V \subset NV + V \subset N\left(V + V\right) \subset NU$.

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006. (с.502–504).