8. Основні відомості про топологічні векторні простори

Означення 8.1. Лінійний простір X (дійсний чи комплексний) із заданою на ньому топологією τ називається *топологічним векторним простором*, якщо топологія τ так погоджена з лінійною структурою, що відображення суми елементів і множення скаляра на елемент є неперервними по сукупності змінних.

Розпишемо означення 1 докладніше. Нехай X — топологічний векторний простір. Розглянемо функції $F : X \times X \to X$ і $G : \mathbb{R} \times X \to X$. Узгодження топології з лінійною структурою означає, що функції F і G є неперервними як функції двох змінних.

Теорема 8.1. Нехай U — відкрита множина у просторі X. Тоді

1) для будь-якого $x \in X$ множина $U + x$ є відкритою
2) для будь-якого $\lambda \neq 0$ множина λU є відкритою.

Доведення. Зафіксуємо $x_2 = -x$ і скористаємося неперервністю функції $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ по першій змінній при фіксованої другій змінній. Отже, функція $f(x_1) = x_1 - x$ є неперервною по x_1, а $U + x$ є прообразом відкритої множини U під дією функції f. Отже, множина $U+x$ є відкритою. Друга властивість виводиться так само, але з використанням неперервності функції $g(x) = \frac{1}{\lambda} x$.

З теореми 1 випливає, що околи будь-якого елемента $x \in X$ є множинами виду $U+x$, де U — околи нуля. Відповідно, топологія τ однозначно визначається системою $\Re_0$ околів нуля. Тому інші властивості топології τ будуть формулюватися через околи нуля. Далі через S_r позначатимемо множину $S_r = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \le r\}$.

Означення 8.2. Підмножина A лінійного простору X називається *поглинаючим*, якщо для будь-якого $x \in X$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in tA$ для будь-якого $t > n$.

Означення 8.3. Підмножина $A \subset X$ називається *урівноваженою*, якщо для будь-якого скаляра $\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| < 1$ виконане включення $\lambda A \subset A$.

Теорема 8.2. Система $\Re_0$ околів нуля топологічного векторного простору X має такі властивості:

1. Будь-який окіл нуля є поглинаючою множиною.
2. Кожний окіл нуля містить урівноважений окіл нуля.
3. Для будь-якого околу $U \in \Re_0$ існує урівноважений окіл $V \in \Re_0$ з $V + V \subset U$.

Доведення.

1. Зафіксуємо $x \in X$ і скористаємося неперервністю функції $f(\lambda) = \lambda x$. Оскільки $f(0)= 0$, неперервність у точці $\lambda= 0$ означає, що для будь-якого $U \in \Re_0$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $\lambda x \in U$ для будь-якого $\lambda \in S_\varepsilon$. Увівши позначення $t = \dfrac{1}{\lambda}$, одержимо, что $x \in tU$ для будь-якого $t > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

2. Нехай $U \in \Re_0$. Через неперервність у точці (0,0) функції $G(\lambda, x) = \lambda x$, існує таке $\varepsilon > 0$ і такий окіл $W \in \Re_0$, що $\lambda x \in U$ для будь-якого $\lambda \in S_\varepsilon$ і будь-якого $x \in W$.

Покладемо $V = \bigcup\limits_{\lambda \in S_\varepsilon} \lambda W$. Покажемо, що множина $V \supset U$ і є шукана урівноважена околиця нуля. З одного боку, $V \supset W$, отже, $V \in \mathfrak{R}_0$. З іншого боку, для будь-якого $\lambda_0 \in S_1$ маємо $\lambda_0 S_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, отже,

$$\lambda_0 V = \bigcup_{\lambda \in S_\varepsilon} \lambda_0 \lambda W = \bigcup_{\mu \in \lambda_0 S_\varepsilon} \mu W \subset \bigcup_{\mu \in S_\varepsilon} \mu W = V.$$

чим доведена урівноваженість околу *V*.

3. Через неперервність у точці (0,0) функції $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, для будь-якого околу $U \in \mathfrak{R}_0$ існують околи $V_1, V_2 \in \mathfrak{R}_0$ з $V_1 + V_2 \subset U$. Шуканий урівноважений окіл нуля *V* виберемо за пунктом 2 так, щоб *V* містився в околі $V_1 \bigcap V_2$.

Теорема 8.3. Нехай система $\mathfrak{R}_0$ околів нуля топології τ на лінійному просторі *X* підкоряється умовам 1-3 теореми 8.2, і для будь-якої точки $x \in X$ система околів $\mathfrak{R}_x$ цієї точки отримується паралельним переносом $\mathfrak{R}_0$ на вектор x. Тоді топологія τ узгоджується з лінійною структурою.

Зауваження. Через урівноваженість умова $V + V \subset U$ пункту 3 теореми 2 можна записувати у вигляді $V - V \subset U$.

Теорема 8.4. Для віддільності за Хаусдорфом топологічного векторного простору *X* необхідно і достатньо, щоб система $\mathfrak{R}_0$ околів нуля підкорялася такій умові: для будь-якого $x \neq 0$ існує окіл $U \in \mathfrak{R}_0$, що не містить точку x.

Доведення. Нехай $x \neq y$. Тоді $x - y \neq 0$ та існує окіл $U \in \mathfrak{R}_0$, який не містить $x-y$. Виберемо такий окіл $V \in \mathfrak{R}_0$, що $V - V \subset U$. Тоді околи $x + V$ і $y + V$ не перетинаються: якщо існує точка z, яка лежить одночасно в $x + V$ і $y + V$, то $z - x \in V$, $z - y \in V$ і $x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V \subset U$.

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006. (с.497–499).